確率過程論　第7回

担当：三角　淳　2019年6月6日

講義概要

・ポアソン過程の合成：

$\{N_t^{(1)}\}_{t\geq 0}, \{N_t^{(2)}\}_{t\geq 0}$ をパラメーター $\lambda, \mu > 0$ の独立なポアソン過程とする。これに対して

$$N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$$

とおくと、$\{N_t\}_{t\geq 0}$ はパラメーター $\lambda + \mu$ のポアソン過程となる。

・ポアソン過程の分解：

$\{N_t\}_{t\geq 0}$ をパラメーター $\lambda > 0$ のポアソン過程とする。一方で、表の出る確率が $p \in (0,1)$ の硬貨を繰り返し投げる。各 $t \geq 0$ に対して、最初の N_t 回の硬貨投げの内で

表が出た回数を $N_t^{(1)}$、裏が出た回数を $N_t^{(2)}$

とおくと、$\{N_t^{(1)}\}_{t\geq 0}, \{N_t^{(2)}\}_{t\geq 0}$ はパラメーター $p\lambda, (1-p)\lambda$ の独立なポアソン過程となる。

レポート問題　以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。（授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。）

[1] $\{N_t^{(1)}\}_{t\geq 0}, \{N_t^{(2)}\}_{t\geq 0}, \{N_t^{(3)}\}_{t\geq 0}$ をパラメーター $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$ の独立なポアソン過程とする。このとき次を求めよ。

(1) $P(N_4^{(1)} + N_4^{(2)} + N_4^{(3)} \geq 2)$,　 (2) $P(N_2^{(1)} = 2 \mid N_4^{(1)} + N_4^{(2)} + N_4^{(3)} \geq 2)$.

補充問題

[2] (1) $\{N_t^{(1)}\}_{t\geq 0}, \{N_t^{(2)}\}_{t\geq 0}$ をパラメーター $\lambda, \mu > 0$ の独立なポアソン過程とする。このとき任意の $n \in \mathbb{N},\ k = 0, 1, \cdots, n$ に対して次を示せ。

$$P(N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = n-k \mid N_t^{(1)} + N_t^{(2)} = n) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}.$$

(2) $\{N_t^{(1)}\}_{t\geq 0}, \{N_t^{(2)}\}_{t\geq 0}$ をパラメーター $1, 2$ の独立なポアソン過程とする。このとき「$N_s^{(1)} = 2$ かつ $N_s^{(2)} = 3$」となるような時刻 $s \geq 0$ が存在する確率を求めよ。

[3] （ポアソン過程の分解の説明で計算を省略した部分）$n = 0, 1, 2, \cdots,\ p \in (0,1),\ \lambda > 0,\ t > 0$ に対して次を確かめよ。

$$\sum_{m=n}^{\infty} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} p^n (1-p)^{m-n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} = e^{-p\lambda t} \frac{(p\lambda t)^n}{n!}.$$