確率過程論　第11回

担当：三角　淳　2019年7月4日

講義概要

・$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ はマルコフ連鎖で、状態空間を I とする。$n \in \mathbb{N},\ i,j \in I$ に対して初通過確率を次で定める。

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_1 \neq j, \cdots, X_{n-1} \neq j, X_n = j \mid X_0 = i).$$

さらに $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ とおく。

・$f_{ii} = 1$ のとき、$i \in I$ は再帰的であるという。また $f_{ii} < 1$ のとき、$i \in I$ は一時的（過渡的、非再帰的）であるという。

・$p_{ij}^{(n)}$ を n ステップ推移確率とするとき、$i \in I$ が再帰的であることは $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ と同値である。また $i \in I$ が一時的であることは $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$ と同値である。

レポート問題　以下の [**1**] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。（授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。）

[**1**] 推移行列が $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。状態空間は $I = \{1,2,3\}$ とする。このとき f_{11}, f_{22}, f_{33} を計算することにより、各状態が再帰的かどうか調べよ。

補充問題

[**2**] 推移行列が $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。状態空間は $I = \{1,2\}$ とする。

(1) $f_{11}^{(n)}, f_{12}^{(n)}, f_{21}^{(n)}, f_{22}^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ を求めよ。

(2) $f_{11} = 1,\ f_{12} = 0,\ f_{21} = 1,\ f_{22} = \dfrac{1}{3}$ となることを確かめよ。（特に f_{11} と f_{22} の結果より、状態1は再帰的、状態2は一時的となる。）

[**3**] 推移行列が $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。状態空間は $I = \{1,2,3,4\}$ とする。

(1) 各状態を相互到達可能性から定まる同値類に分けよ。

(2) 各状態が再帰的かどうか調べよ。