理工系微分積分学　第６回

担当：三角　淳　2019 年 11 月 19 日

講義概要（教科書 **p65-66** も参照）

・$\left(a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)=a\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+b\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y).$

・テイラーの定理：
$f(x,y)$ は開領域 D 上で定義された C^n 級の関数で、$\{(a+ht,b+kt):0\le t\le 1\}\subset D$ とする。このとき、ある $\theta\in(0,1)$ が存在して次をみたす。

$$f(a+h,b+k)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b)+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h,b+\theta k).$$

レポート問題　以下の [**1**] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。（授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。）

[**1**] $f(x,y)=e^{-3x}\sin y$ とする。

(1) $\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)$ を求めよ。

(2) $(a,b)=(0,0)$, $n=2$ のときにテイラーの定理を適用した式を書け。

補充問題

[**2**] $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ をラプラシアンと呼ぶ。また、C^2 級の関数 $f(x,y)$ に対して、$\Delta f=0$ をみたすならば f を調和関数と呼ぶ。次の関数は調和関数か。理由を付けて答えよ。

(1) $f(x,y)=x^2-y^2+4xy$,　(2) $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$.

[**3**] $z=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ のとき、次を示せ。ただし f は C^2 級とする。

(1) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=r\cos 2\theta\dfrac{\partial z}{\partial r}-\sin 2\theta\dfrac{\partial z}{\partial\theta}.$

(2) $y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}.$