理工系微分積分学　第11回

担当：三角　淳　2020年1月7日

講義概要（教科書 **p110-114, 121** も参照）

・重積分の変数変換（2次元極座標の場合）:
$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r.$

・重積分の変数変換（3次元極座標の場合）:
$x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta$ のヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2\sin\theta.$

レポート問題（今回は4点満点）　以下の[**1**]の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。（授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。）

[**1**] 2以上の整数 n に対して、$D_n = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le n^2,\ y \ge 0\}$ とおく。

(1) 極座標変換を考えたとき、D_n に写される $r\theta$ 平面上の領域を図示せよ。

(2) $I_n = \displaystyle\iint_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy$ を求めよ。ただし α は正の実数とする。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n < \infty$ となる α の範囲を求めよ。

補充問題

[**2**] 極座標変換を用いて次の重積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy,\quad D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy,\quad D = \{(x,y) : (x-1)^2+y^2 \le 1\}.$

[**3**] (1) 3次元極座標に対して $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2\sin\theta$ が成り立つことを計算により確かめよ。

(2) 極座標変換を用いて次の重積分を求めよ。

$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz,\quad D = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4\right\}.$$