確率論　第３回

担当：三角　淳　2018 年 4 月 27 日

講義概要 (教科書 p3–7 も参照)

・起こりうる結果が有限通りで、起こり方が同等であるような試行における確率。

・確率（確率測度）がみたすべき性質：

(i) $0 \le P(A) \le 1$, (ii) $P(\Omega) = 1$,

(iii) 高々可算個の排反事象に対して、$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$.

・σ-加法族（σ-集合体）: 確率が定義されるよい集合の集まり。標本空間 Ω の部分集合族 $\mathcal{F}$ が次をみたすときにいう。

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$, (ii) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}$, (iii) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ ならば $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

・確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の導入。

レポート問題　以下の [**1**] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。（授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。）

[**1**] $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする。事象 $A_1, A_2, A_3, \cdots \in \mathcal{F}$ が排反で、$P(A_n) = \frac{3}{7}\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ のとき、$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$ を示せ。

補充問題

[**2**] 標本空間 $\Omega = \{1, 2, 3\}$、事象の全体 $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ とする。次のように定義される P はそれぞれ $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度となるか。理由を付けて答えよ。

(1) $P(\emptyset) = 0$, $P(\{1\}) = \frac{1}{12}$, $P(\{2\}) = \frac{1}{12}$, $P(\{3\}) = \frac{1}{12}$, $P(\{1, 2\}) = \frac{1}{4}$, $P(\{1, 3\}) = \frac{1}{4}$, $P(\{2, 3\}) = \frac{1}{4}$, $P(\Omega) = 1$.

(2) $P(\emptyset) = 0$, $P(\{1\}) = 1$, $P(\{2\}) = 0$, $P(\{3\}) = 0$, $P(\{1, 2\}) = 1$, $P(\{1, 3\}) = 1$, $P(\{2, 3\}) = 0$, $P(\Omega) = 1$.

[**3**] 標本空間 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とする。次の $\mathcal{F}$ はそれぞれ Ω 上の σ-加法族となるか。理由を付けて答えよ。

(1) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \Omega\}$

(2) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \Omega\}$