理工系微分積分学　第15回

担当：三角　淳　2019年1月30日

講義概要（教科書 p126-130 も参照）

・ガンマ関数：$\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx\ (s>0)$.

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\ \ (s>0),\quad \Gamma(n)=(n-1)!\ \ (n\in\mathbb{N}),\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

・ベータ関数：$B(p,q)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\ (p,q>0)$.

・基本関係式：$B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\quad (p,q>0)$.

期末試験の予告問題（数値は変える予定です）

[1] m,n を正の整数とする。次の重積分を、$u=x+y,\ v=x-y$ とおいて u,v に関する積分の形で表し、さらにその値を求めよ。

$$\iint_D (x+y)^m(x-y)^n dxdy,\quad D=\{(x,y):0\le x+y\le 3,\ 0\le x-y\le 4\}.$$

補充問題

[2] ベータ関数に対して次が成り立つことを示せ。

(1) $B(p,q)=B(q,p)$.

(2) $B(p,q+1)=\dfrac{q}{p}B(p+1,q)$.

(3) $B(p,q)=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta$.

[3] (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\cos^3\theta d\theta$ をベータ関数を用いて表せ。

(2) (1) の式をガンマ関数を用いて表し、さらにその値を求めよ。