

統計数学II 第9回

担当：三角 淳 2017年6月13日

講義概要

・ $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ はマルコフ連鎖で、状態空間を I 、推移行列を $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$ とする。 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して、 $\pi_j(n) = P(X_n = j) (j \in I)$, $\pi(n) = (\pi_j(n))_{j \in I}$ とおく。特に $\pi(0)$ を初期分布と呼ぶ。

・ 任意の $n \in \mathbb{N}$, $i_0, i_1, \dots, i_n \in I$ に対して次が成り立つ。

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \pi_{i_0}(0) p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

・ $n = 0, 1, 2, \dots$, $i, j \in I$ に対して、 n ステップ推移確率を $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$ で定める。 $\mathbf{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \in I}$ とおくと、 $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$ が成り立つ。更に $\pi(n) = \pi(0)\mathbf{P}^n$ となる。

レポート問題 以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[1] 初期分布が $\pi(0) = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \right)$ 、推移行列が $\mathbf{P} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる

ようなマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。状態空間は $I = \{1, 2, 3\}$ とする。このとき次を求めよ。

(1) $P(X_8 = 3 | X_6 = 2)$

(2) $P(X_3 = 1)$

補充問題

[2] 初期分布が $\pi(0) = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right)$ 、推移行列が $\mathbf{P} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ で与えられるようなマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。状態空間は $I = \{1, 2\}$ とする。

(1) $\mathbf{P}^n (n \in \mathbb{N})$ を求めよ。

(2) $P(X_n = 1), P(X_n = 2) (n \in \mathbb{N})$ を求めよ。

[3] $\mathbf{P} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ に対して [2] と同様の問題を考えよ。