統計数学II　第８回

担当：三角　淳　2017年6月6日

講義概要

・離散時間マルコフ連鎖の定義：$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を離散時間確率過程で、状態空間 I は高々可算集合とする。任意の $n \in \mathbb{N},\ \ i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}, i, j \in I$ に対して

$$P(X_{n+1} = j \,|\, X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i)$$

をみたすとする。このとき $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を離散時間マルコフ連鎖と呼ぶ。また上のような性質をマルコフ性と呼ぶ。

・上式の右辺を p_{ij} とおく。p_{ij} を推移確率、$\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j\in I}$ を推移確率行列 (推移行列) と呼ぶ。

レポート問題　以下の [**1**] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[**1**] 推移行列が $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2a & 0 & b \\ 0 & |a| & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ で与えられるようなマルコフ連鎖を考える。

(1) 定数 a, b の値を求めよ。

(2) このマルコフ連鎖の状態推移図を書け。

補充問題

[**2**] 推移行列が $\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられるようなマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。状態空間は $I = \{1, 2, 3\}$ とする。このとき次を求めよ。

(1) $P(X_3 = 3 \,|\, X_2 = 2)$

(2) $P(X_3 = 3 \,|\, X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 2)$

(3) $P(X_4 = 2 \,|\, X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 3)$

[**3**] 平面上の格子点 ($\mathbb{Z}^2$) の上を次のような規則で動く確率過程 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ がマルコフ性をもたない事を示せ。

・$X_0 = (0, 0)$.

・時刻１ごとに、上下左右の隣接点のいずれかに等確率で移動する。

・但し、同じ点は２回以上通らない。

・移動できなくなったらそれ以降は停止する。