

# 統計数学II 第12回

担当：三角 淳 2017年7月4日

## 講義概要

- ・  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  はマルコフ連鎖で、状態空間を  $I$  とする。 $p_{ij}^{(n)}$  は  $n$  ステップ推移確率を表す。 $i \in I$  が再帰的である事は  $\sum_{n=1}^\infty p_{ii}^{(n)} = \infty$  と同値である。また  $i \in I$  が一時的である事は  $\sum_{n=1}^\infty p_{ii}^{(n)} < \infty$  と同値である。
- ・  $i, j \in I, i \leftrightarrow j$  とする。このとき  $i$  が再帰的ならば  $j$  も再帰的となり、 $i$  が一時的ならば  $j$  も一時的となる。
- ・  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  が既約とする。任意の  $i \in I$  が再帰的のとき  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  が再帰的であるといい、任意の  $i \in I$  が一時的のとき  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  が一時的であるという。
- ・ 1次元、2次元のシンプルランダムウォークは再帰的、3次元シンプルランダムウォークは一時的である。

レポート問題 以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[1] 1次元シンプルランダムウォーク  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  に対して次を求めよ。

- (1)  $P(X_3 = -1 | X_0 = 0)$
- (2)  $P(X_8 = 4 | X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2)$

## 補充問題

[2] 推移行列が  $\mathbf{P} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  で与えられるマルコフ連鎖  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  を考える。状態空間は  $I = \{1, 2\}$  とする。

- (1)  $\mathbf{P}^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 + 3(-\frac{1}{4})^n & 3 - 3(-\frac{1}{4})^n \\ 2 - 2(-\frac{1}{4})^n & 3 + 2(-\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) を示せ。
- (2)  $\sum_{n=1}^\infty p_{ii}^{(n)} = \infty$  ( $i = 1, 2$ ) である事を確かめよ。

[3] 推移行列が  $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  で与えられるマルコフ連鎖を考える。状態空間は  $I = \{1, 2, 3, 4\}$  とする。

- (1) 各状態を相互到達可能性から定まる同値類に分けよ。
- (2) 各状態が再帰的かどうか調べよ。