

理工系微分積分学 第11回

担当：三角 淳 2017年12月26日

講義概要 (教科書 p110-114, 121 も参照)

・重積分の変数変換 (2次元極座標の場合) :

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ のヤコビアンは } \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r.$$

・重積分の変数変換 (3次元極座標の場合) :

$$x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta \text{ のヤコビアンは } \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta.$$

レポート問題 (今回は4点満点) 以下の[1]の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[1] 2以上の整数 n に対して、 $D_n = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq n^2, y \geq 0\}$ とおく。

(1) 極座標変換を考えたとき、 D_n に写される $r\theta$ 平面上の領域を図示せよ。

(2) $I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy$ を求めよ。ただし α は正の実数とする。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n < \infty$ となる α の範囲を求めよ。

補充問題

[2] 極座標変換を用いて次の重積分を求めよ。

(1) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$

(2) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}.$

[3] (1) 3次元極座標に対して $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta$ が成り立つことを計算により確かめよ。

(2) 極座標変換を用いて次の重積分を求めよ。

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \quad D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$