

# 統計数学II 第8回

担当：三角 淳 2015年12月8日

## 講義概要

・  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  はマルコフ連鎖で、状態空間を  $I$ 、推移行列を  $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$  とする。  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対して、  $\pi_j(n) = P(X_n = j) (j \in I)$ ,  $\pi(n) = (\pi_j(n))_{j \in I}$  とおく。特に  $\pi(0)$  を初期分布と呼ぶ。

・ 任意の  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i_0, i_1, \dots, i_n \in I$  に対して次が成り立つ。

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \pi_{i_0}(0) p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

・  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i, j \in I$  に対して、  $n$  ステップ推移確率を  $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$  で定める。  $\mathbf{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \in I}$  とおくと、  $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$  が成り立つ。更に  $\pi(n) = \pi(0)\mathbf{P}^n$  となる。

レポート問題 以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[1] 初期分布が  $\pi(0) = \left( \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \right)$ 、推移行列が  $\mathbf{P} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  で与えられるようなマルコフ連鎖  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  を考える。状態空間は  $I = \{1, 2, 3\}$  とする。このとき次を求めよ。

(1)  $P(X_{12} = 1 | X_{10} = 3)$

(2)  $P(X_3 = 2)$

## 補充問題

[2] 初期分布が  $\pi(0) = \left( \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right)$ 、推移行列が  $\mathbf{P} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  で与えられるようなマルコフ連鎖  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  を考える。状態空間は  $I = \{1, 2\}$  とする。

(1)  $\mathbf{P}^n (n \in \mathbb{N})$  を求めよ。

(2)  $P(X_n = 1), P(X_n = 2) (n \in \mathbb{N})$  を求めよ。

[3]  $\mathbf{P} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  に対して [2] と同様の問題を考えよ。