統計数学II　第6回（補足）

担当：三角　淳　2015年11月24日

・パラメーター $\lambda > 0$ のポアソン過程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$ と $S_n = \inf\{t \geq 0 \,|\, N_t = n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ に対して、S_n は密度関数が次で与えられるようなガンマ分布に従う。

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \quad (x \geq 0)$$

・上記の S_n に対して、

$$E(S_n) = \frac{n}{\lambda}, \quad V(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}$$

補充問題

[**1**] $\{N_t\}_{t\geq 0}$ をパラメーター 3 のポアソン過程とする。$S_n = \inf\{t \geq 0 \,|\, N_t = n\}$ とするとき、$P(S_2 \leq 3)$ を次の 2 通りの方法で求めよ。

(1) $S_2 \leq 3$ と $N_3 \geq 2$ が同値である事を用いる。

(2) S_2 の密度関数の具体形を用いる。

[**2**] $\{N_t\}_{t\geq 0}$ をパラメーター $\lambda > 0$ のポアソン過程とし、$S_n = \inf\{t \geq 0 \,|\, N_t = n\}$ とする。このとき任意の $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ に対して S_n と S_m が独立でない事を示せ。

[**3**] $\{N_t\}_{t\geq 0}$ をパラメーター $\lambda > 0$ のポアソン過程とする。$S_n = \inf\{t \geq 0 \,|\, N_t = n\}$ とするとき次を示せ。

$$E(e^{tS_n}) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n \quad (t < \lambda,\, n \in \mathbb{N})$$