統計数学II　第10回

担当：三角　淳　2015年12月22日

講義概要

・$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ はマルコフ連鎖で、状態空間を I とする。$n \in \mathbb{N}$, $i, j \in I$ に対して初通過確率を次で定める。

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_1 \neq j, \cdots, X_{n-1} \neq j, X_n = j \,|\, X_0 = i).$$

更に $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ とおく。

・$f_{ii} = 1$ のとき、$i \in I$ は再帰的であるという。また $f_{ii} < 1$ のとき、$i \in I$ は一時的 (過渡的、非再帰的) であるという。

レポート問題（今回は6点満点）　以下の [**1**] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[**1**] 推移行列が $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。状態空間は $I = \{1, 2, 3\}$ とする。このとき各状態が再帰的かどうか調べよ。

[**2**] $n \in \mathbb{N}$ とし、A を n 次の複素正方行列とする。

(1) A が $\lambda \in \mathbb{C}$ を固有値にもつ事の定義を書け。

(2) A がマルコフ連鎖の推移行列のとき、A は 1 を固有値にもつ事を示せ。（ヒント：すべての成分が 1 であるような縦ベクトルを $\mathbf{1}$ とする。$A\mathbf{1} = \mathbf{1}$ は成り立つか？）

補充問題

[**3**] 推移行列が $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。状態空間は $I = \{1, 2, 3\}$ とする。

(1) このマルコフ連鎖が既約である事を示せ。

(2) 全ての状態が再帰的である事を示せ。

[**4**] $0 \leq a \leq 1$ に対して、推移行列が $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1-a \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。状態空間は $I = \{1, 2, 3\}$ とする。このとき各状態が再帰的かどうか調べよ。