統計数学II　第12回

担当：三角　淳　2014年7月8日

講義概要

・$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ はマルコフ連鎖で、状態空間を I とする。$p_{ij}^{(n)}$ は n ステップ推移確率を表す。$i \in I$ が再帰的である事は $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ と同値である。また $i \in I$ が一時的である事は $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$ と同値である。

・$i, j \in I,\ i \leftrightarrow j$ とする。このとき i が再帰的ならば j も再帰的となり、i が一時的ならば j も一時的となる。

・$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が既約とする。任意の $i \in I$ が再帰的のとき $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が再帰的であるといい、任意の $i \in I$ が一時的のとき $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が一時的であるという。

・1次元、2次元のシンプルランダムウォークは再帰的、3次元シンプルランダムウォークは一時的である。

レポート問題

以下の [**1**] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[**1**] 1次元シンプルランダムウォーク $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して次を求めよ。

(1) $P(X_3 = -1 \mid X_0 = 0)$

(2) $P(X_9 = 1 \mid X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2)$

補充問題

[**2**] 推移行列が $\mathbf{P} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。状態空間は $I = \{1, 2\}$ とする。

(1) $\mathbf{P}^n = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 + 3(-\frac{1}{4})^n & 3 - 3(-\frac{1}{4})^n \\ 2 - 2(-\frac{1}{4})^n & 3 + 2(-\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}$ $(n \in \mathbb{N})$ を示せ。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ $(i = 1, 2)$ である事を確かめよ。

[**3**] 推移行列が $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。状態空間は $I = \{1, 2, 3, 4\}$ とする。

(1) 各状態を相互到達可能性から定まる同値類に分けよ。

(2) 各状態が再帰的かどうか調べよ。