

# 統計数学IA演習 第6回

担当：三角 淳 2014年5月21日

事象  $A, B$  が  $P(A) > 0$  をみたすとき、 $A$  のもとでの  $B$  の条件付確率を次で定める。

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

## 例題

[1] (乗法法則)

(1)  $P(A) > 0$  のとき、 $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$  を示せ。

(2)  $n$  を 2 以上の整数とする。事象  $A_1, A_2, \dots, A_n$  に対して帰納法で次を示せ。但し  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$  とする。

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

[2] 6 本中 2 本が当たりであるようなくじを 1 人ずつ順番に引く。このとき 3 人続けてはずれとなる確率を求めよ。

レポート問題 以下の [3],[4] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[3] (全確率の公式)  $n$  を正の整数とする。事象  $A_1, A_2, \dots, A_n$  は排反で、標本空間  $\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k$  とする。このとき事象  $B$  に対して次を示せ。但し  $P(A_k) > 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) とする。

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)$$

[4] 箱の中に白のボールが 3 個、赤のボールが 5 個入っているとす。この箱からボールを 1 個取り出して、元に戻さずに同じ色のボールを箱の中に 2 個追加する。その後、再び箱からボールを 1 個取り出す。このとき、2 回目に取り出されたボールが白である確率を求めよ。

## 補充問題

[5] 公平な硬貨を 6 回投げる。表が 2 回以上出る事象を  $A$ 、表がちょうど 3 回出る事象を  $B$ 、1 回目が表である事象を  $C$  とするとき次を求めよ。

(1)  $P(B|A)$ , (2)  $P(C|B)$ .

[6] 条件付確率は確率となる事示せ。すなわち、確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  と  $P(A) > 0$  をみたす事象  $A$  が与えられたとき、写像  $Q: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$Q(B) = P(B|A) \quad (B \in \mathcal{F})$$

で定めると  $Q$  は確率測度となる事を確かめよ。