確率過程特論　レポート問題

担当：三角　淳　2013 年 6 月 27 日

以下の [1]～[6] の中から 2 題 (以上) を選択し、レポートとして提出して下さい。レポートは **7 月 18 日**の授業終了時に回収します。やむをえずこの日に提出できない場合は、個別に申し出て下さい。

[1] 授業で説明した 2 次元の場合にならって d 次元正方格子上 $(d \geq 3)$ におけるボンドパーコレーションの問題を考えたとき、臨界確率が $p_H(\mathbb{Z}^d) \geq \frac{1}{2d-1}$ をみたす事を示せ。

[2] 2 次元正方格子上のボンドパーコレーションにおいて、頂点 $x \in \mathbb{Z}^2$ を端点に持つ 4 つの辺がすべて closed のとき、x を孤立点と呼ぶ事にする。このとき $p \in [0, 1)$ ならば、確率 1 で無限個の孤立点が存在する事を示せ。

[3] 授業の定理 3.1 の結果と定義 3.2 から、「$p > p_H \Rightarrow \theta(p) > 0$」,「$p < p_H \Rightarrow \theta(p) = 0$」が確かに導かれる事を示せ。

[4] $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間、$(S, \mathcal{S})$ を可測空間とする。$\mathcal{S}'$ は S の部分集合族で、$\mathcal{S}'$ を含む最小の σ-加法族が $\mathcal{S}$ であるとする。このとき写像 $X : \Omega \to S$ が、任意の $A \in \mathcal{S}'$ に対して $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ をみたすならば、X は確率変数である事を示せ。

[5] $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を独立な実数値確率変数列とする。このとき次の 2 つは同値である事を示せ。

(1) $P(\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n < \infty) = 1.$

(2) ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して、$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > a) < \infty.$

[6] 授業内容に関連して、調べたり考察した事について自由に述べよ。