

統計数学II 第7回

担当：三角 淳 2013年5月28日

講義概要

・ポアソン過程の合成： $\{N_t^{(1)}\}_{t \geq 0}$, $\{N_t^{(2)}\}_{t \geq 0}$ をパラメーター $\lambda, \mu > 0$ の独立なポアソン過程とする。これに対して

$$N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$$

と定める。このとき $\{N_t\}_{t \geq 0}$ はパラメーター $\lambda + \mu$ のポアソン過程となる。

・ポアソン過程の分解： $\{N_t\}_{t \geq 0}$ をパラメーター $\lambda > 0$ のポアソン過程とする。一方で、表の出る確率が $p \in (0, 1)$ の硬貨を繰り返し投げる。各 $t \geq 0$ に対して、最初の N_t 回の硬貨投げの中で表が出た回数を $N_t^{(1)}$ 、裏が出た回数を $N_t^{(2)}$ とする。このとき $\{N_t^{(1)}\}_{t \geq 0}$, $\{N_t^{(2)}\}_{t \geq 0}$ はパラメーター $p\lambda$, $(1-p)\lambda$ の独立なポアソン過程となる。

レポート問題 以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[1] $\{N_t^{(1)}\}_{t \geq 0}$, $\{N_t^{(2)}\}_{t \geq 0}$, $\{N_t^{(3)}\}_{t \geq 0}$ をパラメーター $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{7}{5}$ の独立なポアソン過程とする。 $N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)} + N_t^{(3)}$ と定めるとき、 $P(N_1 > 2 | N_3 = 4)$ を求めよ。

補充問題

[2] $\{N_t^{(1)}\}_{t \geq 0}$, $\{N_t^{(2)}\}_{t \geq 0}$ をパラメーター $\lambda, \mu > 0$ の独立なポアソン過程とする。このとき任意の $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \dots, n$ に対して次を示せ。

$$P(N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = n - k | N_t^{(1)} + N_t^{(2)} = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-k}$$

[3] (ポアソン過程の分解で計算を略した部分) $n = 0, 1, 2, \dots$, $p \in (0, 1)$, $\lambda > 0$, $t > 0$ に対して次を確かめよ。

$$\sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} = e^{-p\lambda t} \frac{(p\lambda t)^n}{n!}$$