統計数学II　第13回

担当：三角　淳　2013年7月9日

講義概要

・$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ はマルコフ連鎖で、状態空間を I とする。$p_{ij}^{(n)}$ は n ステップ推移確率、$f_{ij}^{(n)}$ は初通過確率を表す。$i \in I$ が再帰的のとき、

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

とおく。$\mu_i < \infty$ のとき、i は正再帰的であるという。また $\mu_i = \infty$ のとき、i は零再帰的であるという。
・$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が既約かつ周期1で、全ての状態が正再帰的であるとき、エルゴード的であるという。I が有限集合のときは、既約かつ周期1ならばエルゴード的である。
・$\mathbf{P}$ を推移行列とする。$\pi = (\pi_j)_{j \in I}$ で、$\pi_j \geq 0\ (j \in I)$, $\sum_{j \in I} \pi_j = 1$ かつ $\pi\mathbf{P} = \pi$ をみたすようなものを定常分布と呼ぶ。
・$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ がエルゴード的であるとする。定常分布を π とするとき、次が成り立つ。

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j > 0 \quad (i, j \in I)$$

レポート問題　以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[1] 推移行列が $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。

(1) このマルコフ連鎖がエルゴード的である事を示せ。
(2) このマルコフ連鎖の定常分布を求めよ。

補充問題

[2] 推移行列が $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖に対して、全ての状態が正再帰的である事を直接確かめよ。なお状態空間 $I = \{1, 2, 3\}$ とする。

[3] 推移行列が次で与えられるマルコフ連鎖がエルゴード的かどうか調べよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$,　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.