

# 統計数学II 第12回

担当：三角 淳 2013年7月2日

## 講義概要

・  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  はマルコフ連鎖で、状態空間を  $I$  とする。 $p_{ij}^{(n)}$  は  $n$  ステップ推移確率を表す。 $n \in \mathbb{N}, i, j \in I$  に対して初通過確率を次で定める。

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j | X_0 = i).$$

更に  $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$  とおく。

・  $f_{ii} = 1$  のとき、 $i \in I$  は再帰的であるという。また  $f_{ii} < 1$  のとき、 $i \in I$  は一時的 (過渡的、非再帰的) であるという。

・  $i \in I$  が再帰的である事は  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$  と同値である。また  $i \in I$  が一時的である事は  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$  と同値である。

・ 同じ同値類に属する状態は全て再帰的、または全て一時的となる。

レポート問題 以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[1] 推移行列が  $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  で与えられるマルコフ連鎖を考える。状態空間

は  $I = \{1, 2, 3, 4\}$  とする。このとき各状態が再帰的かどうか調べよ。

## 補充問題

[2] 推移行列が  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$  で与えられるマルコフ連鎖を考える。状態空間は  $I = \{1, 2, 3\}$  とする。

(1) このマルコフ連鎖が既約であることを示せ。

(2) 全ての状態が再帰的であることを示せ。

[3]  $0 \leq a \leq 1$  に対して、推移行列が  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1-a \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix}$  で与えられるマルコフ連鎖を考える。状態空間は  $I = \{1, 2, 3\}$  とする。このとき各状態が再帰的かどうか調べよ。