確率過程特論　レポート問題

担当：三角　淳　2012年6月28日

以下の [1]〜[6] の中から2題 (以上) を選択し、レポートとして提出して下さい。レポートは**7月19日**の授業終了時に回収します。やむをえずこの日に提出できない場合は、個別に申し出て下さい。

[1] 授業で説明した2次元の場合にならって3次元正方格子上におけるボンドパーコレーションの問題を考えたとき、臨界確率が $0 < p_H < 1$ をみたす事を示せ。

[2] 2次元正方格子上のボンドパーコレーションにおいて、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\theta_n(p) = P_p(||C_O|| \geq n)$ は p に関する多項式となる事を示せ。

[3] 授業の定理3.5の証明において、$h_n \downarrow 0\ (n \to \infty)$ をみたす任意の数列 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\lim_{n\to\infty} \theta(p+h_n) = \theta(p)$ をみた。このとき確かに $\lim_{h\downarrow 0} \theta(p+h) = \theta(p)$ となる事を示せ。

[4] $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R} \,|\, A$ または A^c が高々可算集合$\}$,
$P(A) = \begin{cases} 0 & A\text{が高々可算集合のとき} \\ 1 & A^c\text{が高々可算集合のとき} \end{cases}$ $(A \in \mathcal{F})$ とする。このとき $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間となる事を示せ。

[5] $\alpha > 1$ とする。$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は同じ確率空間上に定義された実数値確率変数列で、各 n に対して $P(X_n = k) = \begin{cases} n^{-\alpha} & k=1 \\ 1-n^{-\alpha} & k=0 \end{cases}$ とする。このとき $P\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty\right) = 1$ を示せ。

[6] 授業内容に関連して、調べたり考察した事について自由に述べよ。