統計数学II　第7回

担当：三角　淳　2012年11月20日

講義概要

・ポアソン過程の合成：$\{N_t^{(1)}\}_{t\geq 0}$, $\{N_t^{(2)}\}_{t\geq 0}$ をパラメーター $\lambda, \mu > 0$ の独立なポアソン過程とする。これに対して

$$N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$$

と定める。このとき $\{N_t\}_{t\geq 0}$ はパラメーター $\lambda + \mu$ のポアソン過程となる。

・ポアソン過程の分解：$\{N_t\}_{t\geq 0}$ をパラメーター $\lambda > 0$ のポアソン過程とする。一方で、表の出る確率が $p \in (0,1)$ の硬貨を繰り返し投げる。各 $t \geq 0$ に対して、最初の N_t 回の硬貨投げの内で表が出た回数を $N_t^{(1)}$、裏が出た回数を $N_t^{(2)}$ とする。このとき $\{N_t^{(1)}\}_{t\geq 0}$, $\{N_t^{(2)}\}_{t\geq 0}$ はパラメーター $p\lambda$, $(1-p)\lambda$ の独立なポアソン過程となる。

レポート問題　以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[1] $\{N_t^{(1)}\}_{t\geq 0}$, $\{N_t^{(2)}\}_{t\geq 0}$, $\{N_t^{(3)}\}_{t\geq 0}$ をパラメーター $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}$ の独立なポアソン過程とする。$N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)} + N_t^{(3)}$ と定めるとき、$P(N_1 = 2 \,|\, N_2 < 3)$ を求めよ。

補充問題

[2] $\{N_t^{(1)}\}_{t\geq 0}$, $\{N_t^{(2)}\}_{t\geq 0}$ をパラメーター $\lambda, \mu > 0$ の独立なポアソン過程とする。このとき任意の $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \cdots, n$ に対して次を示せ。

$$P(N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = n-k \,|\, N_t^{(1)} + N_t^{(2)} = n) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

[3] (ポアソン過程の分解で計算を略した部分) $n = 0, 1, 2, \cdots$, $p \in (0,1)$, $\lambda > 0$, $t > 0$ に対して次を確かめよ。

$$\sum_{m=n}^{\infty} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} p^n (1-p)^{m-n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} = e^{-p\lambda t} \frac{(p\lambda t)^n}{n!}$$