統計数学II　第6回

担当：三角　淳　2012年11月13日

講義概要

・パラメーター $\lambda > 0$ のポアソン過程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$ に対して

$$S_n = \inf\{t \geq 0 \,|\, N_t = n\} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad S_0 = 0 \quad (*)$$
$$X_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

とおく。S_n はポアソン過程の値がはじめて n となった時刻を表す。$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を到着時間列と呼ぶ。
・上の $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は独立同分布な確率変数列で、X_1 はパラメーター λ の指数分布に従う。
・$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ $(n \in \mathbb{N})$ は、密度関数が次で与えられるようなガンマ分布に従う。

$$p(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \quad (x \geq 0)$$

・$\{N_t\}_{t\geq 0}$ と $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ の間には次のような関係がある。

$$N_t = \sup\{n = 0, 1, 2, \cdots \,|\, S_n \leq t\} \quad (t \geq 0)$$

レポート問題　以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[1] $\{N_t\}_{t\geq 0}$ をパラメーター 2 のポアソン過程とする。S_n を $(*)$ で与えられるものとするとき、$P(S_2 \leq 3)$ を次の 2 通りの方法で求めよ。

(1) $S_2 \leq 3$ と $N_3 \geq 2$ が同値である事を用いる。
(2) S_2 の密度関数の具体形を用いる。

補充問題

[2] $\{N_t\}_{t\geq 0}$ をパラメーター $\frac{1}{2}$ のポアソン過程とする。S_n を $(*)$ で与えられるものとするとき、S_5 の平均と分散を求めよ。

[3] $\{N_t\}_{t\geq 0}$ をパラメーター $\lambda > 0$ のポアソン過程とする。S_n を $(*)$ で与えられるものとするとき、S_n の密度関数の具体形を用いずに次を示せ。

$$E(e^{tS_n}) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n \quad (t < \lambda)$$