確率過程特論　レポート問題

担当：三角　淳　2011年6月28日出題

以下の [1]〜[8] の中から2題以上を選択し、レポートとして提出して下さい。レポートは**7月19日**の授業終了時に回収します。やむをえずこの日に提出できない場合は、個別に申し出て下さい。

[1] グラフ $\Gamma = (G, E)$ を、頂点集合が $G = \{a, b, c, d\}$、辺集合が

$$E = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, d\rangle\}$$

で与えられるようなものとする。ここで a, b, c, d は相異なる点とし、各辺は向き付けられていないものとする。更に、E の各元に対して次のように重みを定める。

$$\mu_{ab} = 1, \mu_{ac} = 1, \mu_{ad} = 1, \mu_{bc} = 2, \mu_{bd} = 1, \mu_{cd} = 2.$$

このとき、関数 $f : G \to \mathbb{R}$ で次をみたすようなものを求めよ。

$$\begin{cases} \Delta f(x) = 0, \quad x \in G \setminus \{a, b\}, \\ f(a) = 0, \quad f(b) = 1. \end{cases}$$

[2] [1] において、有効抵抗 $R_{\mathrm{eff}}(a, b)$ を求めよ。

[3] [1] において、対応する重み付きグラフ上のランダムウォークについて考える。

(1) 頂点 c から出発したランダムウォークが、頂点 a に到達するより前に頂点 b に到達する確率を求めよ。

(2) 頂点 a から出発したランダムウォークが、頂点 a に再び戻ってくるより前に頂点 b に到達する確率を求めよ。

[4] 4次元正方格子上のシンプルランダムウォークが非再帰的である事を示せ。

[5] 頂点集合が $\{0, 1, 2, \cdots\}$、辺集合が $\{\langle x, x+1\rangle \mid x = 0, 1, 2, \cdots\}$、各辺の重みが $\mu_{x,x+1} = 2^x$ $(x = 0, 1, 2, \cdots)$ で与えられるような重み付きグラフを考える。各辺は向き付けられていないものとする。このような重み付きグラフ上のランダムウォークは非再帰的である事を示せ。

[6] α を正の実数とする。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}<\infty$ となるような α の範囲を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}<\infty$ となるような α の範囲を求めよ。

[7] スターリングの公式　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}n^{n}e^{-n}}=1$ を示せ。

[8] 授業内容に関連して、調べたり考察した事について自由に述べよ。