統計数学II　第3回

担当：三角　淳　2011年10月18日

講義概要

・確率変数列で、添字を時刻とみなしたものを確率過程と呼ぶ。$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ などのように、添字が離散的な場合に離散時間確率過程、また $\{X_t\}_{t\geq 0}$ などのように、添字が連続的な場合に連続時間確率過程と呼ぶ。
・確率過程がとる値の集合を状態空間と呼ぶ。
・$\{X_t\}_{t\geq 0}$ の値が時刻とともに $0, 1, 2, \cdots$ と増加し、標本路が時刻に関する右連続関数のとき計数過程と呼ぶ事にする。
・任意の $n \in \mathbb{N},\ \ 0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ に対して

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

が独立であるとする。このとき $\{X_t\}_{t\geq 0}$ は独立増分をもつという。
・任意の $0 \leq s < t < \infty,\ h > 0$ に対して $X_t - X_s$ と $X_{t+h} - X_{s+h}$ が同分布であるとする。このとき $\{X_t\}_{t\geq 0}$ は定常増分をもつという。

レポート問題（以下の [1] の解答を、次回の授業の終わりに提出して下さい。）

[1] 確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ を $P(X_t = t,\ \forall t \geq 0) = 1$ であるようなものとする。このとき $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が定常独立増分をもつ事を示せ。

補充問題

[2] 確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ を $P(X_t = 0,\ \forall t \geq 0) = \frac{1}{2},\ P(X_t = t^2,\ \forall t \geq 0) = \frac{1}{2}$ であるようなものとする。
(1) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が独立増分をもたない事を示せ。
(2) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が定常増分をもたない事を示せ。

[3] 確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が定常独立増分をもつとする。$Y_t = cX_t$ $(c \in \mathbb{R})$ と定めるとき、$\{Y_t\}_{t\geq 0}$ が定常独立増分をもつ事を示せ。