統計数学II　第11回

担当：三角　淳　2012年1月10日

講義概要

・$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ はマルコフ連鎖で、状態空間を I とする。$p_{ij}^{(n)}$ は n ステップ推移確率を表す。

$$p_{ij}^{(n)} > 0$$

であるような 0 以上の整数 n が存在するとき、状態 i は状態 j に到達可能であるといい $i \to j$ とかく。$i \to j$ かつ $j \to i$ のとき、i と j は相互到達可能であるといい $i \leftrightarrow j$ とかく。同値関係 $\leftrightarrow$ によって各状態を同値類に分ける事ができる。
・任意の $i, j \in I$ が相互到達可能のとき、$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ は既約であるという。
・$i \in I$ に対して

$$\{n \in \mathbb{N} \,|\, p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

の最大公約数を i の周期と呼ぶ。(そのような n が存在しないときは 0 とする。)
・$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が既約のとき、全ての状態の周期は等しい。その共通の値を $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ の周期と呼ぶ。

レポート問題 (以下の [1] の解答を、次回の授業の終わりに提出して下さい。)

[1] 推移行列が $\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。

(1) このマルコフ連鎖が既約である事を示せ。
(2) このマルコフ連鎖の周期を求めよ。

補充問題

[2] 推移行列が次で与えられるマルコフ連鎖に対して、各状態を相互到達可能性から定まる同値類に分けよ。なお (1),(2) では状態空間 $I = \{1, 2, 3\}$、(3) では $I = \{1, 2, 3, 4\}$ とする。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[3] [2] のそれぞれのマルコフ連鎖に対して、各状態の周期を求めよ。