

統計数学II 自習問題

担当：三角 淳 2011年1月11日

- ・解答の提出は特に必要ありません。
- ・期末試験では以下の中から一部の問題について、その類題を出題します。(下記以外の問題も若干出題する予定です。)
- ・[6] は1月25日の授業で扱う予定の範囲の問題です。

[1] $\{N_t\}_{t \geq 0}$ をパラメーター 2 のポアソン過程とする。このとき、次を求めよ。

- (1) $P(N_1 = 0 \mid N_3 = 2)$.
- (2) $P(N_4 < 5 \mid N_2 = 1)$.
- (3) $E[N_1^2 N_4]$.
- (4) $E[N_2^2 \mid N_1 = 1]$.

[2] $\{N_t\}_{t \geq 0}$ をパラメーター $\frac{1}{2}$ のポアソン過程とする。ポアソン過程の値がはじめて $n \in \mathbb{N}$ となった時刻を S_n とするとき、 S_3 の平均と分散を求めよ。

[3] $\{N_t^{(1)}\}_{t \geq 0}, \{N_t^{(2)}\}_{t \geq 0}$ をそれぞれパラメーター 1, 2 のポアソン過程で、互いに独立なものとする。このとき、「 $N_s^{(1)} = 2$ かつ $N_s^{(2)} = 3$ 」となるような時刻 $s \geq 0$ が存在する確率を求めよ。

[4] 初期分布が $\pi(0) = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \right)$ 、推移行列が $P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるような

マルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。状態空間は $I = \{1, 2, 3\}$ とする。このとき、 $P(X_3 = 1)$, $P(X_3 = 2)$, $P(X_3 = 3)$ を求めよ。

[5] $0 \leq a, b \leq 1$ に対して、推移行列が $P = \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ 1-b & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるようなマルコフ連鎖が既約であるための a, b の条件を求めよ。

[6] 推移行列が $P = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ で与えられるようなマルコフ連鎖を考える。

- (1) このマルコフ連鎖の定常分布を求めよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ を求めよ。(注: P^n を直接計算する必要はない。)