測度論　期末試験問題の略解（2010 年 8 月 3 日実施分）

担当：三角　淳

[1] 20 点、[2] (1) 10 点 (2) 15 点、[3] (1)5 点 (2)10 点 (3)15 点、[4] 25 点の 100 点満点です。今回の期末試験、および普段のレポートの提出状況をもとに成績評価を行います。採点結果に関しては、8 月 5 日 (木) の正午までに理学部 2 号館 6 階の学部生用掲示板にアナウンスを出す予定です。

[1] $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = [1, \frac{5}{2}] \cup \{\cup_{n=3}^{\infty} A_n\}$ のように互いに共通部分を持たない集合の和で表される事から、測度の σ-加法性より

$$\begin{aligned}\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \frac{3}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} = \frac{3}{2} + 3 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{3}{2} + 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

が求めるものです。

[2] (1) 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}((c, \infty))$ が可測集合になる事。形が異なっていても同値な定義であれば問題ありません。

(2) 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}((c, \infty)) = (-\infty, 2-c)$ は可測集合より、f は可測関数です。

[3] (1) $f_n(x)$ の分子が $-nx^{2010} + 8n^2 \geq -n + 8n^2 = n(8n-1) > 0$ であり、分母も正である事から分かります。

(2) $f_n(x) = \dfrac{-x^{2010}/n + 8}{2x + \sqrt{x}/n^2 + 2}$ と変形すれば、n が大きいほど分母は小さくなり、分子は大きくなっています。

(3) 上で示した (1), (2) から単調収束定理が適用できて、

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{4}{x+1} dx = 4 \log 2$$

のように計算できます。

[4] f が非負単関数の場合は $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x)$ (ここで a_i は 0 以上の実数、A_i は可測集合) の形に書けるので、

$$\int_E f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E \cap A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E) = 0$$

より分かります。可測関数 $f \geq 0$ に対しては非負単関数で近似し、一般の可測関数 f に対しては $f = f^+ - f^-$ と分けて考える事により確かめられます。

[**レポート問題 14 の説明**] $\left|\cos \dfrac{nx}{\sqrt{x}+n}\right| \leq 1$ だから、有界収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\cos\frac{nx}{\sqrt{x}+n}dx = \int_0^{\pi/2}\lim_{n\to\infty}\cos\frac{nx}{\sqrt{x}+n}dx = \int_0^{\pi/2}\cos x dx = 1$$

となります。