測度論　自習問題

担当：三角　淳　2010年7月6日

・解答の提出は特に必要ありません。
・期末試験では以下の中から数題について、その類題を出題します。(下記以外の問題も若干出題する予定です。)
・[5], [6] は7月13日〜7月20日の授業で扱う予定の範囲の問題です。

[1] $x_n = \sin \dfrac{n\pi}{4}$ に対して、$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} x_n$, $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

[2] 正の整数 n に対して、$\mathbb{R}$ 上の区間 A_n を $A_n = \left[n, n + \dfrac{1}{n(n+1)}\right]$ で定める。このとき、$\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ の測度を求めよ。

[3] $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathbb{R}$ 上の可測集合の列で、各 n に対して $A_n \subset (0,1)$、かつ A_n の測度は 1 であるようなものとする。このとき、$\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ の測度は 1 である事を示せ。(注: 仮定の下で、必ずしも $A_n = (0,1)$ であるとは限らない。)

[4] (1) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が可測関数である事の定義を述べよ。
(2) $f(x) = 2x - 1$ が可測関数である事を、(1) の定義に基づいて直接示せ。

[5] 正の整数 n と $0 \le x \le 1$ に対して、

$$f_n(x) = \frac{-nx^4 + 4n^2}{2n^2 x + \sqrt{x} + 2n^2}$$

と定める。
(1) 任意の n と x に対して、$f_n(x) \ge 0$ である事を示せ。
(2) 任意の n と x に対して、$f_{n+1}(x) \ge f_n(x)$ である事を示せ。
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ を求めよ。(極限と積分の順序交換を行う場合は、その根拠を明記する事。)

[6] (1) ルベーグの収束定理の主張を述べよ。
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を可測関数で、$\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx = 1$ をみたすようなものとする。$A_n = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \ge n\}$ と定めるとき、次を示せ。

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x)^2 dx = 0.$$

(上の (1) を用いるか、あるいは他の方法で説明してもよい。)