「一般化された Δ-種数」の理論の構築に向けて

福間　慶明 (Fukuma Yoshiaki)

1　はじめに

X を複素数体上定義された n 次元非特異射影多様体, L を X 上の豊富な因子とする. このとき対 (X, L) を**偏極多様体**と呼ぶ. n 次元偏極多様体 (X, L) の不変量としては, **次数 $\boldsymbol{L^n}$**, **断面種数 $\boldsymbol{g(X, L)}$**, そして **Δ-種数 $\boldsymbol{\Delta(X, L)}$** などがある. さらに偏極多様体を深く研究するために, 次数や断面種数の一般化として, 筆者は**第 $\boldsymbol{i}$ 断面幾何種数 $\boldsymbol{g_i(X, L)}$** なるものを定義し, 現在その性質を調べている (ここで, i は $0 \leq i \leq n$ をみたす任意の整数であり, $g_0(X, L) = L^n$, $g_1(X, L) = g(X, L)$ となる). 特に, $g_i(X, L)$ は i 次元多様体の幾何種数のもつ性質と類似の性質を持つと期待され, $i = 2$ などではその証拠となる結果がいくつか証明されている. またこれらの結果を用いて随伴束の大域切断の次元に関するいくつかの問題を解決することもできた. その意味で, この不変量については存在意義が多少なりとも見出せたと思う.

さらに, 次のステップとして, Δ-種数 $\Delta(X, L)$ の一般化を考え, **第 $\boldsymbol{i}$ Δ-種数 $\boldsymbol{\Delta_i(X, L)}$** なるものを定義した. これは Δ-種数の一般化のために定義した不変量である (ここで, i は $0 \leq i \leq n$ をみたす任意の整数であり, さらに $i = 1$ のとき $\Delta_1(X, L) = \Delta(X, L)$ が成り立つ). この不変量は, おそらく断面幾何種数同様, 偏極多様体を調べる上で役に立つであろうと期待している. そこで, この論説で第 i Δ-種数の理論の構築のための問題提起とその現状について書いてみたい. この論説が今後の研究の指針となることを望む.

この論説を載せて頂ける機会を与えてくださった学習院大学の飯高茂先生のご好意に感謝いたします.

2 Δ-種数の復習

ここでは, 以後の一般化された Δ-種数の理論展開のために必要となる, 藤田先生による Δ-種数の理論の概要を簡単に説明する. 詳しくは藤田先生の著書 [8], 日本語として書かれた唯一の解説書である, 飯高先生の著書 [18], もしくは雑誌「数学」の藤田先生による論説 [1][1]や拙著 [13] などを参照いただくとよいと思う.

まず, $\Delta(X, L)$ の定義を与えておこう.

定義 2.1 (X, L) を n 次元偏極多様体とする. このとき, **Δ-種数** $\boldsymbol{\Delta(X, L)}$ は以下の式で定義される:

$$\Delta(X, L) := n + L^n - h^0(L).$$

では Δ-種数の性質を述べる前に, 後で必要になる記号等をここでまとめておこう.

定義 2.2 (X, L) を n 次元偏極多様体とし，$X_0 := X$，$L_0 := L$ とおく.

(1) L が ***k*-はしごをもつ**とは射影多様体の列 $X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_k$ で $1 \leq j \leq k$ なる任意の整数 j に対して X_j は L_{j-1} の完備線形系 $|L_{j-1}|$ の元となるものが存在するときをいう[2]．ただし $L_{j-1} := L|_{X_{j-1}}$ である．さらに各 X_j が非特異のとき，L は**非特異 *k*-はしごをもつ**という.

(2) L が $(n-1)$-はしごをもつとき，単に ***L* ははしごをもつ**という.

注意 2.1 X を n 次元非特異射影多様体，L を大域切断で生成されている豊富な直線束とする．このとき Bertini の定理より完備線形系 $|L|$ の一般の元を用いて X を切断することで $1 \leq k \leq n-1$ をみたす任意の整数 k に対して L の k-はしご $X \supset X_1 \supset \cdots \supset X_k$ で各 X_j は非特異であり，かつ $h^0(L_k) > 0$ となるものを作ることができる.

---

[1] これについては現在, 以下のサイトで閲覧することができる.
http : //www.journalarchive.jst.go.jp/japanese/jnltop$_j$a.php?cdjournal = sugaku1947

[2] $\dim X_j = n - j$ であることに注意.

記号 2.1 kを$1 \leq k \leq n-1$をみたす整数とし，Lはk-はしご$X \supset X_1 \supset \cdots \supset X_k$をもつと仮定する．このとき$1 \leq m \leq k$をみたす任意の整数$m$に対して，$L_m := L|_{X_m}$とし，さらに$r_{p,q} : H^p(X_q, L_q) \to H^p(X_{q+1}, L_{q+1})$を自然な写像とする．

以上の準備の下, Δ-種数に関して次のことがいえる:

定理 2.1 (1) $n = 1$のとき$\Delta(X, L) = h^1(\mathcal{O}_X) - h^1(L) \geq 0$となる．

(2) Lがはしご$X \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{n-1}$をもつとする．このとき$1 \leq j \leq n-1$をみたす任意の整数$j$に対して次が成り立つ:

$$\Delta(X, L) = \Delta(X_j, L_j) + \sum_{k=0}^{j-1} \dim \mathrm{Coker}(r_{0,k}).$$

特に$\Delta(X, L) \geq \Delta(X_1, L_1) \geq \cdots \geq \Delta(X_{n-1}, L_{n-1}) \geq 0$が成立する．

次にΔ-種数による分類を行う際に基本となるとても重要な結果が次の定理である:

定理 2.2 ([8]) (X, L)をn次元偏極多様体とする．

(1) $\Delta(X, L) > \dim \mathrm{Bs}|L|$が成立する[3]．特に$\Delta(X, L) \geq 0$がいえる．

(2) もし$L^n \geq 2\Delta(X, L) - 1$，$B := \mathrm{Bs}|L|$が高々有限集合，かつ$X$が$B$の各点で非特異ならば, Lははしごをもつ．

(3) $g(X, L) \geq \Delta(X, L)$であり, かつ$L$ははしごをもつとする．

  (a) もし$L^n \geq 2\Delta(X, L) - 1$なら，はしごは**regular**[4]である．

  (b) もし$L^n \geq 2\Delta(X, L)$なら，$\mathrm{Bs}|L| = \emptyset$である．

  (c) もし$L^n \geq 2\Delta(X, L) + 1$なら，$L$は非常に豊富な直線束であり, かつ$g(X, L) = \Delta(X, L)$となる．さらに任意の整数$t$と$0 < i < n$なる任意の整数$i$に対して$h^i(tL) = 0$が成り立つ．

---

[3] $\mathrm{Bs}|L| = \emptyset$のときは$\dim \mathrm{Bs}|L| = -1$と思う．今後この不等式を**$\Delta$-不等式**とよぶ.

[4] $0 \leq q \leq n-2$なる任意のqに対して$r_{0,q}$が全射であるときをいう.

Δ-種数による分類の流れ
X が非特異の場合に $\Delta(X,L)\leq 1$ なる (X,L) の分類の方針を述べよう．まず定理 2.2 (1) により $\dim \mathrm{Bs}|L|\leq 0$ となることが示される．ここで, $L^n\geq 2\Delta(X,L)-1$ となることと定理 2.2 (2) を用いることにより L がはしごを持つことがわかる．さらに $g(X,L)\geq \Delta(X,L)$ が成り立つこともわかるので定理 2.2 (3) を用いて (X,L) の構造を詳しく調べることができ，(X,L) の分類を得る．

以上のように, 定理 2.2 は, Δ-種数による分類を行う際にとても重要な役割を果たしている.

注意 2.2 X を非特異とするとき, 現在 Δ-種数による分類に関してわかっていることをまとめる:
(I) $\Delta(X,L)=0$ については完全な分類がなされている ([2]). 特に $\Delta(X,L)=0$ となるための必要十分条件は $g(X,L)=0$ である．
(II) $\Delta(X,L)=1$ については $L^n=1$ の一部の場合を除き, 完全な分類が得られている ([3]，[4]，[6])．また Del Pezzo 多様体は $\Delta(X,L)=1$ のクラスに属し，完全に分類されている ([8])．ところで, 非特異偏極多様体 (X,L) が Del Pezzo 多様体であるための必要十分条件は $g(X,L)=1$ かつ $\Delta(X,L)=1$ をみたすことである.
(III) $\Delta(X,L)=2$ についてもある程度のところまでは分類が得られている (詳しくは [5]，[7] をみよ).

3　第 i Δ-種数の定義と性質

次に Δ-種数の一般化を考えたいのだが, その際，何に着目して Δ-種数を一般化するかが問題となる．ここでは, 定理 2.1 の観点から, Δ-種数の一つの一般化を定義し[5]，その基本性質を述べる．

まず定義に必要となる**第 i 断面幾何種数**の定義をのべる.

記号 3.1 X を n 次元射影多様体, L を X 上の豊富な因子, そして t を変数とする．この時 $L^{\otimes t}$ の Euler-Poincaré 標数 $\chi(L^{\otimes t})$ は, t に関する次

[5]後述の定理 4.1.1 を参照

数 n の多項式である．このとき, $\chi(L^{\otimes t})$ は一意的に

$$\chi(L^{\otimes t}) = \sum_{j=0}^{n} \chi_j(X,L)\binom{t+j-1}{j}$$

と表現できる．

定義 3.1 ([9]) (X,L) を n 次元偏極多様体とし, i を $0 \leq i \leq n$ をみたす整数とする．このとき (X,L) の**第 i 断面幾何種数 $g_i(X,L)$** は次の式で定義される:

$$g_i(X,L) = (-1)^i(\chi_{n-i}(X,L) - \chi(\mathcal{O}_X)) + \sum_{j=0}^{n-i}(-1)^{n-i-j}h^{n-j}(\mathcal{O}_X).$$

ではここで, 第 i Δ-種数の定義を与える．

定義 3.2 ([10]) (X,L) を n 次元偏極多様体とする．このとき $0 \leq i \leq n$ をみたす任意の整数 i に対して (X,L) の**第 i Δ-種数 $\Delta_i(X,L)$** を次の式で定義する:

$$\Delta_i(X,L) := \begin{cases} 0 & i = 0 \text{ のとき}, \\ g_{i-1}(X,L) - \Delta_{i-1}(X,L) & \\ \quad +(n-i+1)h^{i-1}(\mathcal{O}_X) - h^{i-1}(L) & 1 \leq i \leq n \text{ のとき}. \end{cases}$$

以下では $0 \leq i \leq n$ をみたす任意の整数 i に対して定義されるこの第 i Δ-種数たちを総称して**「一般化された Δ-種数」**と呼ぶことにする．一般化された Δ-種数は次のような性質をもつ．

定理 3.1 (X,L) を n 次元偏極多様体, i を $1 \leq i \leq n$ をみたす整数とする．

(1) $i = 1$ のとき, $\Delta_1(X,L)$ は $\Delta(X,L)$ と一致する．特に $\Delta_1(X,L) \geq 0$ である．

(2) $i = n$ のとき, $\Delta_n(X,L) = h^n(\mathcal{O}_X) - h^n(L)$ が成り立つ (定理 2.1 (1) の一般化)．

(3) $\Delta_i(X,L)$ は変形のパラメーターに関して下半連続関数となる．

4　一般化された Δ-種数に関する基本問題

一般化された Δ-種数の定義は複雑なため, 多くのことがわかっていない. そこで一般化された Δ-種数の意味や性質を理解するために, これから述べる基本問題を考えるのは重要でありかつ興味深い. 以下でその基本問題について個別に考えてみたい.

その前に以下でよく使われる仮定をここでまとめて載せておく.

仮定 1 (X, L) を n 次元偏極多様体とする. ここで $1 \leq i \leq n$ なる整数 i と $0 \leq k \leq n - i$ なる整数 k を固定する.

(A_i) L は $(n-i)$-はしごをもつ.

(B_i) $h^0(L_{n-i}) > 0$.

(C) $0 \leq j \leq n-1$ と $t > 0$ をみたす任意の整数 j と t に対して $h^j(-tL) = 0$ が成り立つ.

(D_i^k) $k \leq j \leq n-i$ なる任意の整数 j に対して X_j は正規である.

(E_i^k) $k \leq j \leq n-i$ をみたす任意の整数 j に対して X_j は Cohen-Macaulay である.

注意 4.1 (X, L) を非特異偏極多様体で, L がその大域切断で生成されているとすると, $1 \leq i \leq n$ なる任意の整数 i と $0 \leq k \leq n-i$ なる任意の整数 k に対して仮定 1 はみたされる.

4.1　一般化された Δ-種数の基本問題 1

一般化された Δ-種数を考える際に, まず素朴に思い浮かぶのは, Δ-種数に関する理論, いわゆる「藤田理論」を 一般化された Δ-種数の場合に拡張できるかについて考えることであろう.

基本問題 1 一般化された Δ-種数は, Δ-種数と似た性質をもつかを調べよ. 具体的には,

(1) $\Delta_i(X, L)$ のとりうる範囲について調べよ.

(2) Δ-種数に関する藤田理論を, 一般化された Δ-種数の場合に拡張できるかについて調べよ.

ここで, これらについて現在までに知られている結果を述べよう.

(1) について

(1.1) まず次がいえる[6].

定理 4.1.1 ([10], [17]) (X, L) を n 次元偏極多様体とし, i を $1 \leq i \leq n$ をみたす整数とする. もし (X, L) が仮定 1 の (A_i), (B_i), (C) をみたすとする. このとき $1 \leq j \leq n-i$ なる任意の整数 j に対して次が成立する.

$$\Delta_i(X, L) = \Delta_i(X_j, L_j) + \sum_{k=0}^{j-1} \dim \mathrm{Coker}(r_{i-1,k}).$$

$$\Delta_i(X, L) \geq \Delta_i(X_1, L_1) \geq \cdots \geq \Delta_i(X_{n-i}, L_{n-i}) \geq 0$$

つまり, (X, L) が仮定 1 の (A_i), (B_i), (C) をみたすならば, $\Delta_i(X, L) \geq 0$ がいえる. 特に, 注意 4.1 より (X, L) が非特異偏極多様体で L が大域切断で生成されている場合, 次がいえる:

定理 4.1.2 ([10]) (X, L) を n 次元非特異偏極多様体とする. もし L が大域切断で生成されているなら $1 \leq i \leq n$ をみたす任意の整数 i に対して $\Delta_i(X, L) \geq 0$ が成立する.

(1.2) 非特異偏極多様体の場合に, 一般の豊富な因子に対しても第 i Δ-種数の非負性はいえるであろうか? 例えば X がアーベル多様体 ([14]) やトーリック多様体 (ただしこのときは非特異でなくてもよい) のとき

[6] この定理は定理 2.1 (2) の一般化とも思える. 実は, この定理 4.1.1 が成り立つように第 i Δ-種数を定義したのである.

([11]) は任意の豊富な因子に対して一般化された Δ-種数は非負となることがわかる．また, $i=1$ の場合は Δ-不等式から非負性がいえる．しかし**一般には非負性は成り立たない**．**$2 \leq i \leq n$ をみたす任意の整数 i に対して $\Delta_i(X,L) < 0$ となる (X,L) の例が存在する**:

例 4.1.1 ([10]) n を 3 以上の整数，m を $2 \leq m \leq n-1$ をみたす任意の整数，Y を m 次元非特異射影多様体で K_Y が豊富な因子でありかつ $h^0(K_Y)=0$ となるものとする．ここで $\mathcal{E} := \mathcal{O}(K_Y)^{\oplus n-m+1}$ とすると $\mathcal{E}$ は豊富なベクトル束となる．そこで X を $\mathcal{E}$ に付随する Y 上の $\mathbb{P}^{n-m}$ 束 $\mathbb{P}_Y(\mathcal{E})$ とし，L をそのトートロジー的な直線束とする．このとき (X,L) は n 次元非特異偏極多様体で $\Delta_m(X,L) = -(n-m+1) < 0$ となることがわかる．

では, 非特異偏極多様体の場合に, 一般化された Δ-種数の非負性はどの程度までいえるか? これについては以下の定理 4.1.3 が現在知られている.

定理 4.1.3 ([14]) (X,L) を n 次元非特異偏極多様体で, $n \geq 2$ かつ $\dim \mathrm{Bs}|L| \leq n-1$ をみたすものとする．このとき, $i \geq \dim \mathrm{Bs}|L| + 1$ なる任意の整数 i に対して $\Delta_i(X,L) \geq 0$ が成立する.

Proof. [14, Corollary 4.1] をみよ. □

ここで定理 4.1.3 はある程度特異点を許しても成り立つことが知られている (詳しくは [14, Theorem 4.1] をみよ). また定理 4.1.3 は定理 4.1.2 の一般化とも思える.
次の例を考えると, 定理 4.1.3 はある意味で最良であることがわかる.

例 4.1.2 ([14]) Y を次元 $m(\geq 2)$ の非特異射影多様体で K_Y が豊富でありかつ $h^0(K_Y)=0$ をみたすものとする．$A_1, \ldots, A_{n-m}$ を Y 上の豊富な因子で $\mathrm{Bs}|A_i| = \emptyset$ かつ 任意の i に対して $h^m(A_i)=0$ をみたすものとする．ただし $n > m$ とする．ここで $\mathcal{E} := K_Y \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_{n-m}$, $X := \mathbb{P}_Y(\mathcal{E})$ とおく．さらに $\pi : \mathbb{P}_Y(\mathcal{E}) \to Y$ をその射影とする．$1 \leq i \leq n-m$ なる任意の整数 i に対して, $\mathcal{E}_i := K_Y \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_{i-1} \oplus A_{i+1} \oplus \cdots \oplus A_{n-m}$, $D_i := \mathbb{P}_Y(\mathcal{E}_i)$ とおく．このとき, $D_i \in |H(\mathcal{E}) - \pi^* A_i|$ かつ $D_1 \cap \cdots \cap D_{n-m} = \mathbb{P}(K_Y)$ をえる．ここで $L := H(\mathcal{E})$ とおく．すると L は豊富で,

各 i に対して $D_i+\pi^*A_i \in |L|$ である．$D_1\cap\cdots\cap D_{n-m}=\mathbb{P}(K_Y)$ であり，かつ A_i はその大域切断で生成されるので，$\dim \mathrm{Bs}|L| \le m$ をえる．他方 [9, Example 2.10 (8)] と [10, Lemma 2.12.1] より $g_m(X,L)=h^m(\mathcal{O}_X)$ かつ $\Delta_{m+1}(X,L)=0$ をえる．したがって

$$\begin{aligned}\Delta_m(X,L) &= g_m(X,L)-\Delta_{m+1}(X,L)+(n-m)h^m(\mathcal{O}_X)-h^m(L)\\ &= (n-m+1)h^m(\mathcal{O}_X)-h^m(L).\end{aligned}$$

ここで $h^m(\mathcal{O}_X)=h^m(\mathcal{O}_Y)=h^0(K_Y)=0$ かつ

$$\begin{aligned}h^m(L) &= h^m(\pi_*(L))\\ &= h^m(\mathcal{E})\\ &= h^m(K_Y\oplus A_1\oplus\cdots\oplus A_{n-m})\\ &= h^m(K_Y)=1\end{aligned}$$

に注意する．すると $\Delta_m(X,L)=-1<0$ であり，定理 4.1.3 より，$\dim \mathrm{Bs}|L| \ge m$ をえる．したがって $\dim \mathrm{Bs}|L|=m$ をえる．この (X,L) が $\dim \mathrm{Bs}|L|=m$ かつ $\Delta_m(X,L)<0$ の例である．

定理 4.1.3 を考えると，もしある整数 i で $\Delta_i(X,L)<0$ となることがわかると，$\dim \mathrm{Bs}|L| \ge i$ となるので，L の底点の次元の様子がわかることがいえる．もちろん Δ-種数の値が小さい場合は，Δ-不等式を用いてもわかるが，$\Delta(X,L)>n$ となってしまうと，L の底点の次元の様子はわからなくなってしまう．その意味で一般化された Δ-種数が負になる場合は，L の底点に関する性質はわかってしまう．
定理 4.1.3 では，n 次元非特異偏極多様体 (X,L) に対し，$0\le i\le n$ なる整数 i で $\Delta_i(X,L)<0$ となる必要条件として，$\dim \mathrm{Bs}|L| \ge i$ が成り立つことはいえた．では，別の条件として $\kappa(K_X+(n-i)L)$ の値に関連して何かいえるであろうか?

問題 4.1.1 (X,L) を n 次元非特異偏極多様体とする．このとき $2\le i\le n$ なる整数 i において $\Delta_i(X,L)<0$ であることと $\kappa(K_X+(n-i)L)$ の値との間にどのような関係があるか?

この問題に関しては次の結果がある．

定理 4.1.4 (X, L) を n 次元非特異偏極多様体とする.
(1) もし $\Delta_n(X, L) < 0$ ならば, $\kappa(X) = n$ である.
(2) もし $\Delta_2(X, L) < 0$ であり, かつ (X, L) が非特異射影曲面上のスクロールでないならば, $\kappa(K_X + (n-2)L) \geq 2$ である.

また, $i = 2$ の場合について $\Delta_2(X, L)$ の下限に関する評価式が考察されている ([16]).

(2) について
藤田理論において中心的役割を果たすのが, 定理2.2であった. したがって, この結果が一般化された Δ-種数に対しても成り立つかを考えることは大切である. これについては以下のことがわかっている:

定理 4.1.5 ([17]) (X, L) を n 次元偏極多様体, i を $1 \leq i \leq n-1$ なる整数とする. さらに次を仮定する.

(1) (X, L) は仮定 1 の (A_i), (B_i), (C), (D_i^{n-i}), (E_i^{n-i}) をみたす.

(2) $g_i(X, L) \geq \Delta_i(X, L)$.

(3) $L^n \geq \Delta_i(X, L) + \Delta_1(X, L) + 2 - i$.

このとき, $g_i(X, L) = \Delta_i(X, L)$ が成り立つ.

定理 4.1.6 ([17]) (X, L) を $\dim X = n \geq 3$ なる偏極多様体, i を $2 \leq i \leq n-1$ なる整数とする. さらに次を仮定する.

(1) (X, L) は仮定 1 の (A_i), (B_i), (C), (D_i^0), (E_i^0) をみたす.

(2) $g_i(X, L) \geq \Delta_i(X, L)$.

(3) $L^n \geq \Delta_i(X, L) + \Delta_1(X, L) + 2 - i$.

このとき, $i+1 \leq k$, $i+1 \leq s \leq n-1$, $t \geq 1$ なる任意の整数 k, s, t に対して $\Delta_k(X, L) = 0$, $h^s(L^{\otimes t}) = 0$ が成り立つ.

注意 4.1.1 定理4.1.5と定理4.1.6は定理2.2 (3) (c) の一部と対応する. しかし $i \geq 2$ の場合に定理2.2 (3) (c) における L の very ampleness に関連する結果の類似がいえるかは今のところわからない.

定理 4.1.7 ([17]) (X, L) を n 次元偏極多様体, i を $1 \le i \le n-1$ なる整数とする. さらに次が成り立つと仮定する:

(1) (X, L) は仮定 1 の (A_i), (B_i), (C), (D_i^{n-i}), (E_i^{n-i}) が成り立つ.

(2) $g_i(X, L) \ge \Delta_i(X, L)$.

(3) $L^n \ge \Delta_i(X, L) + \Delta_1(X, L) - i$.

このとき次のうちの一つが成り立つ:

(a) (X, L) は regular $(n-i)$-はしご[7]をもつ.

(b) $\Delta_i(X, L) = \Delta_i(X_1, L_1) = \cdots = \Delta_i(X_{n-i}, L_{n-i})$.

注意 4.1.2 定理 4.1.7 において, もし $i = 1$ なら, 上の仮定 (1) は必要でない. さらに (a) と (b) は互いに同値となる. したがって, もし $i = 1$ なら, この結果は定理 2.2 (3) (a) に対応するものである.

注意 4.1.3 $i \ge 2$ では定理 2.2 (3) (b) における底点自由に関する結果の類似が成り立つかは今のところわからない.

ところで注意 2.2 でものべたように, Del Pezzo 多様体は $\Delta(X, L) = 1$ の特別なクラスであり, Δ-種数の理論をもちいて完全に分類がなされている. 非特異 Del Pezzo 多様体 (X, L) は $\mathcal{O}(K_X + (n-1)L) = \mathcal{O}_X$ をみたす偏極多様体であり, $\Delta(X, L) = 1$ かつ $g(X, L) = 1$ で特徴付けされるが, では $\boldsymbol{\mathcal{O}(K_X + (n-i)L) = \mathcal{O}_X}$ **なる非特異偏極多様体** $\boldsymbol{(X, L)}$ **を断面幾何種数や一般化された $\boldsymbol{\Delta}$-種数を用いて特徴づけができるであろうか?** これに関して, 次の予想を提案した ([15]).

予想 4.1.1 (X, L) を次元が $n \ge 3$ なる非特異偏極多様体とする. このとき, $2 \le i \le n-1$ なる任意の整数 i に対して次は同値である.

$C(i, 1)$: $K_X = -(n-i)L$.
$C(i, 2)$: $\Delta_i(X, L) = 1$ かつ $2g_1(X, L) - 2 = (i-1)L^n$.
$C(i, 3)$: $\Delta_i(X, L) > 0$ かつ $2g_1(X, L) - 2 = (i-1)L^n$.
$C(i, 4)$: $g_i(X, L) = 1$ かつ $2g_1(X, L) - 2 = (i-1)L^n$.
$C(i, 5)$: $g_i(X, L) > 0$ かつ $2g_1(X, L) - 2 = (i-1)L^n$.

[7] L が $(n-i)$-はしご $X \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{n-i}$ をもち, $0 \le j \le n-i-1$ なる任意の整数 j に対して $H^0(X_j, L_j) \to H^0(X_{j+1}, L_{j+1})$ が全射となるときをいう.

注意 4.1.4 $i=1$ の場合, 予想 4.1.1 の $C(1,1)$ と $C(1,2)$ は同値である. しかし予想 4.1.1 の $C(1,1)$ と $C(1,3)$, $C(1,1)$ と $C(1,4)$, $C(1,1)$ と $C(1,5)$ は同値ではないことに注意 ((X,L) が非特異楕円曲線上のスクロール ($g_1(X,L)=1$ かつ $\Delta_1(X,L)\geq 2$) となる場合がおこる).

この予想に関しては次のことがわかっている.

定理 4.1.8 ([15]) 次の場合には予想 4.1.1 は正しい.

(1) $\max\{2, \dim \mathrm{Bs}|L|+2\} \leq i \leq n-1$ となる任意の整数 i の場合 (特に L が大域切断で生成されている場合は $2\leq i\leq n-1$ をみたす任意の整数 i で成立).

(2) $i=2$ の場合.

(3) $i=3$ かつ $n\geq 5$ の場合.

4.2 一般化された Δ-種数の基本問題 2

断面種数と Δ-種数との間には関係があるように, 第 i 断面幾何種数と第 i Δ-種数との間にも関係があるかを調べることは, 意味があることであろう. そこで

基本問題 2 第 i 断面幾何種数 $g_i(X,L)$ と第 $i\Delta$-種数 $\Delta_i(X,L)$ との間の関係を調べよ.

例えば, 上でも述べたように断面種数と Δ-種数には次のような関係がある.

定理 4.2.1 ([8]) (X,L) を非特異偏極多様体とする. このとき, $g(X,L)=0$ であるための必要十分条件は $\Delta(X,L)=0$ である.

ではこのような関係が第 i 断面幾何種数と第 i Δ-種数との間にもあるであろうか? これについてはつぎの結果がある.

定理 4.2.2 (X,L) を n 次元偏極多様体, i を $1 \leq i \leq n$ をみたす整数とする．さらに (X,L) は仮定 1 の (A_i), (B_i), (C), (D_i^{n-i}), (E_i^{n-i}) をみたすとする．このとき $\Delta_i(X,L)=0$ であるための必要十分条件は $g_i(X,L)=0$.

したがって, 特に (X,L) が非特異偏極多様体で, L がその大域切断で生成されているときは $\Delta_i(X,L)=0$ であることと $g_i(X,L)=0$ であることは同値であることがわかる．では一般の豊富な因子ではどうなるであろうか?

問題 4.2.1 (X,L) を n 次元非特異偏極多様体とする．このとき $2 \leq i \leq n$ なる整数 i で $g_i(X,L)=0$ ならば, $\Delta_i(X,L) \leq 0$ がいえるか?

注意 4.2.1 この逆は不成立である． つまり, $\Delta_i(X,L) \leq 0$ であるが, $g_i(X,L) > 0$ となる偏極多様体の例は存在する．

例 4.2.1 ([10, Example 4.1.1]) $n \geq 4$ とし, $\mathbb{P}^{n+1}$ を $n+1$ 次元射影多様体とする．$(\xi_0 : \xi_1 : \cdots : \xi_{n+1})$ をその斉次座標とする．また $k=n+3$ を素数とする (特に n は偶数となる)．$G=\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ を 1 の原始 k 乗根で生成される位数 k の巡回群とする．このとき $\rho \in G$ を $\mathbb{P}^{n+1}$ に次のように作用させる．

$$(\rho)\cdot(\xi_0 : \xi_1 : \cdots : \xi_{n+1}) = (\xi_0 : \rho\xi_1 : \cdots : \rho^{n+1}\xi_{n+1}),$$

ただし $\rho = \exp(2\pi i/k)$． このとき $Y : \sum_{i=0}^{n+1} {\xi_i}^k = 0$ は G-不変であり, $X := Y/G$ は非特異で $\pi : Y \to X$ は次数 $k=n+3$ のエタール被覆となる．さらに K_X は豊富になり, $g_2(X,K_X)$ と $\Delta_2(X,K_X)$ を計算すると

$$\begin{aligned} g_2(X,K_X) &= \frac{n^2+2}{6} - 1 \\ \Delta_2(X,K_X) &= -\frac{n}{2} \end{aligned}$$

となる．

このように $\Delta_i(X,L) < 0$ かつ $g_i(X,L) > 0$ なる例はあるが, では $\Delta_i(X,L) = 0$ なる (X,L) に対しては $g_i(X,L)$ の値はどうなるであろうか?

問題 4.2.2 (X,L) を n 次元非特異偏極多様体とする．このとき $1 \leq i \leq n$ のある整数 i で $\Delta_i(X,L)=0$ ならば, $g_i(X,L)=0$ がいえるか?

また, 次のことも言える．

命題 4.2.1 (X,L) を n 次元非特異偏極多様体とする．このとき $1 \leq i \leq n$ なる整数 i で $K_X+(n-i)L$ は nef であり, かつ $\kappa(K_X+(n-i)L) \leq i-1$ とする． このとき $i \leq k \leq n$ なる任意の整数 k に対して $g_k(X,L) = \Delta_k(X,L)$ がいえる．

Proof. 仮定より, 次元が $i-1$ 以下のある正規射影多様体 Y, Y 上の豊富な直線束 H と, あるファイバー空間 $\varphi : X \to Y$ で, $K_X+(n-i)L = \varphi^*(H)$ をみたすものが存在する (ただし $\dim Y = 0$ のときは $\mathcal{O}_X(K_X+(n-i)L)=\mathcal{O}_X$). すると [10, Lemma 1.6] より $i \leq k$ なる任意の整数 k に対して

$$h^k(L) = 0 \qquad (1)$$

$$h^k(\mathcal{O}_X) = 0 \qquad (2)$$

が成り立つ．また, 仮定 $\kappa(K_X+(n-i)L) \leq i-1$ より $t \leq n-i-1$ なる任意の整数 t に対して

$$h^0(K_X+tL)=0 \qquad (3)$$

が成り立つ．したがって, (2), (3), [9, Theorem 2.3] より, $i+1 \leq k$ なる任意の整数 k に対して

$$g_k(X,L)=0 \qquad (4)$$

がいえる．

また, (1), (2) と定理 3.1 (2) より,

$$\Delta_n(X,L) = h^n(\mathcal{O}_X) - h^n(L) = 0$$

がいえ, さらに第 i Δ-種数の定義と (1), (2), (4) より $i+1 \leq k$ なる任意の整数 k に対して

$$\Delta_k(X,L)=0 \qquad (5)$$

が成り立つ．よって $i+1 \leq k \leq n$ なる任意の整数 k に対して $g_k(X,L) = \Delta_k(X,L)$ が成立する．さらに, (5) を用いると

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_{i+1}(X,L) \\ &= g_i(X,L) - \Delta_i(X,L) + (n-i)h^i(\mathcal{O}_X) - h^i(L) \\ &= g_i(X,L) - \Delta_i(X,L) \end{aligned}$$

が成り立つので, $g_i(X,L) = \Delta_i(X,L)$ もいえる．以上より, 示された． □

これに関連して, 次の問題もあげておこう．

問題 4.2.3 (X,L) を n 次元非特異偏極多様体とする．このとき $1 \leq i \leq n$ なるある整数 i で $0 \leq \kappa(K_X + (n-i)L) \leq i-1$ とする．このとき $i \leq k \leq n$ なる任意の整数 k に対して $g_k(X,L) = \Delta_k(X,L)$ がいえるか?

注意 4.2.2 $i = 1,2,n$ では, この問題は正しいことがわかっている．

4.3 一般化された Δ-種数の基本問題 3

一般化された Δ-種数を考える際に, 新たに出てくる問題として,「縦の関係」, つまり $\Delta_i(X,L)$ と $\Delta_{i+1}(X,L)$ の間の関係を調べることも重要であろう．

基本問題 3 $\Delta_i(X,L)$ と $\Delta_{i+1}(X,L)$ の間の関係を調べよ．

この問題に関しては次のことがわかっている．

命題 4.3.1 ([10], [17]) (X,L) を n 次元偏極多様体とする．さらに $1 \leq i \leq n-1$ なる整数 i に対し, (X,L) は仮定 1 の (A_i), (B_i), (C), (D_i^{n-i-1}), (E_i^{n-i-1}) をみたし, さらに $h^0(L_{n-i-1}) \geq 3$ をみたすとする．このとき, もし $\Delta_i(X,L) = 0$ ならば, $\Delta_{i+1}(X,L) = 0$ である．

これに関連して次の問題をあげておく．

問題 4.3.1 (X,L) を n 次元非特異偏極多様体とする．このとき $1 \leq i \leq n$ なる整数 i で $\Delta_i(X,L) = 0$ かつ $\Delta_{i+1}(X,L) \neq 0$ となる例があるか?

4.4 一般化された Δ-種数の基本問題 4

上記でのべたように, Δ-種数の値が小さい場合の分類は藤田先生により得られている. では一般化された Δ-種数の値が小さい場合の分類はどうなるであろうか?

基本問題 4 偏極多様体を第 i Δ-種数の値により分類せよ.

ただし, 一般化された Δ-種数は, 負になることもありえるので, 一般の場合について扱うのはいまのところ難しい. そこで, 一般化された Δ-種数の値が非負となる場合, 例えば, L が非常に豊富な場合や底点自由などの場合に, 一般化された Δ-種数の値による分類を考えてみる. すると $i=2$ の場合については次がいえる.

定理 4.4.1 ([10]) (X,L) を n 次元偏極多様体 $(n \geq 3)$ で, L **は大域切断で生成されている**とする. もし $\Delta_2(X,L)=0$ であるならば, (X,L) はつぎのうちのいずれかである.

(1) $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$.

(2) $(\mathbb{Q}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^n}(1))$.

(3) 非特異射影曲線上の scroll.

(4) $\mathcal{O}_X(K_X+(n-1)L)=\mathcal{O}_X$, つまり, (X,L) は Del Pezzo 多様体.

(5) 非特異射影曲線上の quadric ファイブレーション.

(6) 非特異射影曲面上の scroll.

(7) (M,A) を (X,L) の reduction とする.

(7.1) $n=4$, $(M,A)=(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2))$.
(7.2) $n=3$, $(M,A)=(\mathbb{Q}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^3}(2))$.
(7.3) $n=3$, $(M,A)=(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3))$.

(7.4) $n = 3$, M は非特異射影曲線上の $\mathbb{P}^2$-束であり，その任意のファイバー F に対して，$(F, A|_F) \cong (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ が成り立つ.

ここで偏極多様体 (X, L) の **reduction** の定義を与えておく.

定義 4.1 (1) X (resp. Y) を n 次元非特異射影多様体とし，L (resp. H) を X (resp. Y) 上の豊富な因子とする．この時 $(\mathbf{X}, \mathbf{L})$ **が** $(\mathbf{Y}, \mathbf{H})$ **の simple blowing up である**とはある双有理射 $\pi : X \to Y$ が存在して次の性質を満たす時をいう.

(1.1) π は Y のある 1 点 blowing up である.

(1.2) $L = \pi^*(H) - E$ となる．ただし E は π-exceptional effective reduced divisor とする.

(2) X (resp. M) を n 次元非特異射影多様体とし，L (resp. A) を X (resp. M) 上の豊富な因子とする．この時 $\boldsymbol{(M, A)}$ **が** $\boldsymbol{(X, L)}$ **の reduction である**とはある双有理射 $\mu : X \to M$ で次の性質をみたすものが存在する時をいう.

(2.1) μ は有限回の simple blowing up の合成である.

(2.2) (M, A) は他の偏極多様体の simple blowing up からえられない.

さて，$\Delta_2(X, L) = 1$ については次のことがいえる.

定理 4.4.2 ([10], [12]) (X, L) を n 次元偏極多様体 $(n \geq 3)$ で，L は**非常に豊富である**とする．もし $\Delta_2(X, L) = 1$ であるならば，(X, L) はつぎのうちのいずれかである (ただし，(M, A) は (X, L) の reduction とする).

(1) (M, A) は向井多様体 (つまり $\mathcal{O}_M(K_M + (n-2)A) = \mathcal{O}_M$) である.

(2) (M, A) は非特異楕円曲線 C 上の Del Pezzo ファイブレーションである．$f : M \to C$ をその射とすると，C 上の豊富な因子 H で $K_M + (n-2)A = f^*(H)$ かつ $\deg H = 1$ なるものが存在する.

(3) (M, A) は非特異曲面上の quadric ファイブレーションである. $f: M \to S$ をその射とすると, S 上の豊富な因子 H で $K_M+(n-2)A = f^*(K_S + H)$ なるものが存在する. さらに (S, H) は以下のいずれかになる.

(3.1) S は楕円曲線 B 上の $\mathbb{P}^1$-束 $p: S \to B$ で $H = 3C_0 - F$, ただし C_0 (resp. F) は S の極小断面で $C_0^2 = 1$ (resp. p のファイバー) である.

(3.2) S は超楕円曲面, $H^2 = 2$ であり, $h^0(H) = 1$ をみたす.

問題 4.4.1 (X, L) を非特異偏極多様体とし, L は大域切断で生成されている, もしくは非常に豊富であるとする. このとき $\Delta_i(X, L)$ の値により (X, L) を分類せよ.

4.5 一般化された Δ-種数の基本問題 5

基本問題 5 第 i Δ-種数の幾何学的意味づけを与えよ.

これは例えば一般化された Δ-種数が非負になった場合, この不変量の値の幾何的意味はどのようなものになるかを調べたいということである. これについては今のところ何もわかっていない. しかしこの問題を考えることはとても重要なことであると考える.

4.6 一般化された Δ-種数の基本問題 6

基本問題 6 一般化された Δ-種数を用いた応用を与えよ. 特に L が大域切断で生成されているか, もしくは非常に豊富な場合を考えよ.

これについて考えることは, 一般化された Δ-種数の存在意義を示す上で重要である. L がその大域切断で生成されている因子, もしくは非常に豊富な因子の場合を考えると, 上でも述べたように, 一般化された Δ-種数は, Δ-種数と類似のよい性質をもつことがわかる. したがって今までにわかっていない問題のうち, この一般化された Δ-種数の性質をもちいて解けるものがあるのではないかと考えている. 今後これに関して何か報告できることを望んでいる.

参考文献

[1] 藤田隆夫, 偏極多様体の構造と分類, 数学 第 27 巻 第 4 号 (1975), 日本数学会, 316–326.

[2] T. Fujita, *On the structure of polarized varieties with Δ-genera zero,* J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo 22 (1975), 103–115.

[3] T. Fujita, *On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, I,* J. Math. Soc. Japan 32 (1980), 709–725.

[4] T. Fujita, *On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, II,* J. Math. Soc. Japan 33 (1981), 415–434.

[5] T. Fujita, *Polarized manifolds of Δ-genus two, part I* J. Math. Soc. Japan 36 (1984), 709–730.

[6] T. Fujita, *On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, III,* J. Math. Soc. Japan 36 (1984), 75–89.

[7] T. Fujita, *Polarized manifolds of degree three and Δ-genus two,* J. Math. Soc. Japan 41 (1989), 311–331.

[8] T. Fujita, *Classification Theories of Polarized Varieties,* London Math. Soc. Lecture Note Ser. 155, Cambridge University Press, (1990).

[9] Y. Fukuma, *On the sectional geometric genus of quasi-polarized varieties, I,* Comm. Algebra 32 (2004), 1069–1100.

[10] Y. Fukuma, *A generalization of the Δ-genus of quasi-polarized varieties,* J. Math. Soc. Japan 57 (2005), 1003–1044.

[11] Y. Fukuma, *On invariants of polynomial functions,* Japan. J. Math. 31 (2005), 345–378.

[12] Y. Fukuma, *Addendum: "On the sectional geometric genus of quasi-polarized varieties, I",* Comm. Algebra 36 (2008), 3250–3252.

[13] 福間慶明, 偏極多様体の不変量に関する話題, 数学 第61巻 第4号 (2009), 日本数学会, 395–417.

[14] Y. Fukuma, *A note on non-negativity of the ith Δ-genus of quasi-polarized varieties,* Kyushu J. Math. 64 (2010), 17–34.

[15] Y. Fukuma, *A numerical characterization of polarized manifolds $(X, \mathcal{L})$ with $K_X = -(n-i)\mathcal{L}$ by the ith sectional geometric genus and the ith Δ-genus,* preprint, arXiv:1005.4722.

[16] Y. Fukuma, *A lower bound for the second Δ-genus of polarized manifolds,* in preparation.

[17] Y. Fukuma, *Remarks on the ith Δ-genus of quasi-polarized varieties,* in preparation.

[18] 飯高茂, 可換環論, 岩波講座, 基礎数学, 岩波書店, 1977.

Yoshiaki Fukuma
Department of Mathematics
Faculty of Science
Kochi University
Akebono-cho, Kochi 780-8520
Japan
E-mail: fukuma@kochi-u.ac.jp