

環論 やってみよう問題 No.10

出席番号、名前：_____

問題 10.1. 環 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ を考える。このとき、

1. R の元 z のノルム $N(z)$ を $N(z) = z\bar{z}$ で定義する。 $(\bar{z}$ は z の複素共役。) $N(zw) = N(z)N(w)$ ($\forall z, w \in R$) であることをもちいて、

$$a|b \implies N(a)|N(b)$$

が成り立つことを証明せよ。

2. z が R の可逆元なら、 $N(z) = 1$ であることを証明しなさい。
 3. $2 \in R$ の R での約元は、 $\pm 1, \pm 2$ に限ることを証明しなさい。
 4. 2 は R の素元ではないことを証明しなさい。
 5. 参考 [今回はやらない] 2 はこれ以上 R 内では因数分解できない(既約元)である。
-