

環論 やってみよう問題 No.8

出席番号、名前：_____

問題 8.1. $\mathbb{R}[X]$ から \mathbb{C} への写像 f が

$$f(p) = p(\sqrt{-1})$$

で与えられているとする。このとき、

0. $[f$ は環の準同型写像であることを示せ。(という問題を本来諸君は解くべきだが やってみようの時間の制約上省略する。)]
 1. $(X^2 + 1)\mathbb{R}[X] \subset \text{Ker}(f)$ を示しなさい。
 2. $p \in \mathbb{R}[X]$ を $X^2 + 1$ で割った商を q , 余りを r とおく。 p, q, r の関係を式で書きなさい。
 3. p, q, r が前小問の関係にあるとき、 $f(p) = 0$ ならば $r = 0$ であることを示しなさい。
 4. $(X^2 + 1)\mathbb{R}[X] \supset \text{Ker}(f)$ を示しなさい。
 5. 環の準同型定理により、 f はどのような同型を誘導するだろうか。
-