

環論 やってみよう問題 No.8

出席番号、名前： _____

問題 8.1. $\mathbb{R}[X]$ から \mathbb{C} への写像 f が

$$f(p) = p(\sqrt{-1})$$

で与えられているとする。このとき、

0. [f は環の準同型写像であることを示せ。(という問題を本来諸君は解くべきだがやってみようの時間の制約上省略する。)]
 1. $(X^2 + 1)\mathbb{R}[X] \subset \text{Ker}(f)$ を示しなさい。
 2. $p \in \mathbb{R}[X]$ を $X^2 + 1$ で割った商を q , 余りを r とおく。 p, q, r の関係を式で書きなさい。
 3. p, q, r が前小問の関係にあるとき、 $f(p) = 0$ ならば $r = 0$ であることを示しなさい。
 4. $(X^2 + 1)\mathbb{R}[X] \supset \text{Ker}(f)$ を示しなさい。
 5. 環の準同型定理により、 f はどのような同型を誘導するだろうか。
-