

環論 やってみよう問題 No.4

出席番号、名前： _____

問題 4.1. 環 \mathbb{Z} と、その部分集合 $13\mathbb{Z}$ とに対して、 \mathbb{Z} での同値関係 (クラスわけ) を

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in 13\mathbb{Z}$$

により定義する。このとき、

1. 1234 とこのクラス分けについて同じクラスであるような \mathbb{Z} の元の例を5つあげなさい。(それらがおなじクラスであることの簡単な理由も定義に基づいて書くこと。)
2. -1234 とこのクラス分けについて同じクラスであるような \mathbb{Z} の元 n のうち、 $0 \leq n \leq 12$ を満たすものをあげなさい。(n と -1234 が同じクラスである理由も定義に基づいて書くこと。)
3. 10^3 と -1 とは同じクラスであることを証明しなさい。但し、 $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ の加法、乗法がうまく定義されていることを適宜 (証明無しに) 用いてもよい。
4. 10^{15} と -1 とは同じクラスであることを証明しなさい。

(次のことも考えてみると良い:

$10^{15} = (1000000000000000)$ を 13 で割った余りは幾らか?)
