環論 No.12 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$《素元分解環》(2)

素元の定義

可換環 R の元 p にたいし、

$$p\text{: 素元} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} p \neq 0 \text{ かつ } (p) \text{ は } R \text{ の素イデアル}$$
$$\Leftrightarrow p \neq 0 \text{ かつ } (\forall a \in R \forall b \in R \ (p|ab \implies (p|a \ \text{ or } \ p|b)))$$

「ab が p で割れるなら a と b のどちらかは p で割れる。」

参照: 整域の定義 (零因子を 0 以外にもたない)

「ab が 0 と等しいなら a と b のどちらかは 0 である。」

既約元の定義

可換環 R の元 p にたいし、

$$p\text{: 既約元} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall y \in R \forall z \in R (yz = x \implies (y \in R^\times \text{ または } z \in R^\times)))$$

「分解できない」(分解できたとしたら片方が可逆元)

命題 12.1. R が素元分解環ならば、$R \setminus \{0\}$ の各元は

$$up_1p_2 \dots p_l \qquad (l \in \mathbb{N}, u \in R^\times, p_1, \dots, p_l \text{ は } R \text{ の素元})$$

と書くことができるが、この書き方は並び方と同伴を除いて一意的である。すなわち、

$$up_1p_2 \dots p_l = vq_1q_2 \dots q_m$$
$$(l, m \in \mathbb{N}, u, v \in R^\times, p_1, \dots, p_l, q_1, \dots, q_m \text{ は } R \text{ の素元})$$

ならば、$l = m$ であって、なおかつある置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_l$ があって各 j にたいして p_j と $q_{\sigma(j)}$ はそれぞれ同伴になる。

問題 12.1. 整域 R の元 a, b の最大公約元が 2 つあったとすれば、それらは互いに同伴であることを証明せよ。

- ED: Euclidean domain
- PID: **p**rincipal **i**deal **d**omain
- UFD: **u**nique **f**actorization **d**omain 直訳は「一意分解整域」。