

## 環論 No.8 要約

今日のテーマ 《環の準同型定理 (2)》

**定理 8.1** (環の準同型定理). 環  $R$  から別の環  $S$  への準同型写像  $\phi: R \rightarrow S$  が与えられたとする。このとき、次が成り立つ。

1.  $\phi$  の像  $\text{Image } \phi$  は  $S$  の部分環である。
2.  $\phi$  の核  $I = \text{Ker } \phi$  は  $R$  のイデアルである。
3. 剰余環  $R/I$  は  $\text{Image } \phi$  と同型である。

**例 8.1.**  $f_2: \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{C}$  を  $f_2(p) = p(3)$  で定義する。 $f_2$  は環準同型であり、環の準同型定理により環の同型

$$\bar{f}_2: \mathbb{Q}[X]/(X-3) \cong \mathbb{Q}$$

を誘導する。

**例 8.2.**  $f_3: \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{C}$  を  $f_3(p) = p(\sqrt{-1})$  で定義する。 $f_3$  は環準同型であり、環の準同型定理により環の同型

$$\bar{f}_3: \mathbb{Q}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$$

を誘導する。

**例 8.3.**  $f_4: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{C}$  を  $f_4(p) = p(\sqrt{-1})$  で定義する。 $f_4$  は環準同型であり、環の準同型定理により環の同型

$$\bar{f}_4: \mathbb{R}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{C}$$

を誘導する。

**例 8.4.**  $f_5: \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{C}$  を  $f_5(p) = p(\sqrt{2})$  で定義する。 $f_5$  は環準同型であり、環の準同型定理により環の同型

$$\bar{f}_5: \mathbb{Q}[X]/(X^2-2) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

を誘導する。

**例 8.5.**  $f_6: \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{C}$  を  $f_6(p) = p(\sqrt{2})$  で定義する。 $f_6$  は環準同型であり、環の準同型定理により環の同型

$$\bar{f}_6: \mathbb{Z}[X]/(X^2-2) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$

を誘導する。

**例 8.6.**  $f_7 : \mathbb{Q}[X, Y] \rightarrow \mathbb{C}$  を  $f_7(p) = p(2, 3)$  で定義する。 $f_7$  は環準同型であり、環の準同型定理により環の同型

$$\bar{f}_7 : \mathbb{Q}[X, Y]/(X - 2, Y - 3) \cong \mathbb{Q}$$

を誘導する。

**例 8.7.**  $f_8 : \mathbb{Q}[X, Y] \rightarrow \mathbb{C}$  を  $f_8(p) = p(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  で定義する。 $f_8$  は環準同型であり、環の準同型定理により環の同型

$$\bar{f}_8 : \mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2, Y^2 - 3) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$$

を誘導する。

今回の例で、 $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ ,  $(\mathbb{C})$ ,  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ,  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$  は体である。その意味で、例えば  $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$  のことを「 $\mathbb{Q}$  に  $\sqrt{-1}$  を付け加えた体」とよび、 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$  と書いたりする。これは体論において基本的な構成である。