環論 No.7要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 《環の準同型定理》環 R から S への準同型 f が与えられたとき、写像に関する一般論から f による R のクラス分けができる。それは $\mathrm{Ker}(f)$ による R のクラス分けと一致する。

定理 7.1. 環準同型 $f : R \to S$ について、R の同値関係 $\sim_f$ を

$$x \sim_f y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y)$$

で定義し、また $r \in R$ の $R/\mathrm{Ker}(f)$ でのクラスを $\bar{r}$ とすると、次のことが成り立つ。

1. $x, y \in R$ にたいして、

$$x \sim_f y \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} = \bar{y}$$

が成り立つ

2. f は

$$\bar{f} : R/\mathrm{Ker}(f) \ni \bar{r} \mapsto f(r) \in \mathrm{Image}(f) \qquad (r \in R)$$

なる同型を誘導する。

代数では群、加群、環、Lie 環など、いろいろなモノについてそれぞれ「準同型定理」がなりたつが、それはすべて次の単純な事実に基づく:

「値による分類」

写像 $f : X \to Y$ が与えられたとき、f の行き先でわけることによって X の元の分類 (クラスわけ) ができる。

さらに、

Kernel の重要性

f が環の準同型の場合には、f の値による分類は「差が $\mathrm{Ker}(f)$ に入るかどうかの分類」と同じことである。

(環や加群の準同型では、元 a と b の「差 (違い)」は $a - b$ で決まるものであるが、群の場合には、ab^{-1} で与える。)

問題 7.1. 環準同型 $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$ が与えられていて、$f(X) = 3$ だと分かっているとする。 このとき、

1. 多項式 $X^2 + 3X + 5 \in \mathbb{Z}[X]$ の f による像を具体的に求めなさい。
2. $\mathrm{Ker}(f)$ の元で、 0 と異なるものを具体的に3つあげなさい。