環論 No.4要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$剰余環

補題 4.1. R が単位元をもつ環であるとし、I をそのイデアルとする。このとき、

1. R に同値関係 $\sim$ が、次のようにして決まる。

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I.$$

2. $R/\sim$ に、足し算を次のようにして入れる。

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \quad (\bar{?} \text{ は } ? \text{ の } \sim \text{ に関するクラスを表す。})$$

この足し算はうまく定義されていて、$R/\sim$ はこの足し算について可換群になる。

3. $R/\sim$ に、かけ算を次のようにして入れる。

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

このかけ算はうまく定義されていて、$R/\sim$ はこのかけ算について半群になる。

4. $R/\sim$ は上で定義された足し算、かけざんに関し環をなす。しかも、この環は単位元 $\bar{1}$ を持つ。

定義 4.1. 上の補題の仮定のもとで、 $R/\sim$ に上のような足し算、かけ算を入れて環にしたものを R/I と書き、R の I による**剰余環**と呼ぶ。

例題 4.1. 17770430 を 9 で割った余りを求めよ。

(解答) 整数 n の $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ におけるクラス (剰余類) を $\bar{n}$ と書くことにする。一般に、$\overline{10} = \bar{1}$ であることに注意すると、

$$\overline{10}^k = \bar{1} \quad (k \in \mathbb{Z}_{>0})$$

というという等式が成り立つことがわかる。これを用いると、

$$
\begin{aligned}
\overline{17770430} =& \overline{1\times 10^7 + 7\times 10^6 + 7\times 10^5 + 7\times 10^4} \\
& \overline{+0\times 10^3 + 4\times 10^2 + 3\times 10^1 + 0} \\
=& \overline{1}\times\overline{10}^7 + \overline{7}\times\overline{10}^6 + \overline{7}\times\overline{10}^5 + \overline{7}\times\overline{10}^4 \\
& + \overline{0}\times\overline{10}^3 + \overline{4}\times\overline{10}^2 + \overline{3}\times\overline{10}^1 + \overline{0} \\
=& \overline{1} + \overline{7} + \overline{7} + \overline{7} + \overline{0} + \overline{4} + \overline{3} + \overline{0} \\
& = \overline{1+7+7+7+0+4+3+0} \\
& = \overline{29} = \overline{2\times 10 + 9} = \overline{2+9} = \overline{2}
\end{aligned}
$$

を得る。
(答え)　2
(注意) 九去算は計算機のない時代に、計算の確かめの目的で使われた。現在でも、占い (カバラ占い) 等で名残を見かけることがある。

問題:
　あなたの思い付いた 8 桁以上の数 (簡単すぎないもの) を x とします。このとき、$x\times 314159265 + 1234567$ を 9 で割ったあまりを (計算機やコンピュータを使わずに) 求めなさい。x 自身と、求め方も書くこと。なお、検算にコンピュータ等を使用するのは構わないし、むしろ推奨する。