

環論 No.3 要約

今日のテーマ: イデアル、「生成されるイデアル」

定義 3.1. R は単位元をもつ環であるとし、 I はその部分集合であるとする。 I が R のイデアルであるとは、次の条件が成り立つときにいう。

1. I は $(R, +)$ の部分群である。すなわち、 I は R の加・減法について閉じている。
2. I の元に R の元を右から掛けても左から掛けてもやっぱり I の元になる。すなわち、任意の $x \in I$ と任意の $r \in R$ について、

$$rx \in I, xr \in I$$

が成り立つ。

例 3.1 (イデアルの例).

1. $10\mathbb{Z}$ は \mathbb{Z} のイデアルである。
2. もっと一般に、 $n > 0$ にたいして、 $n\mathbb{Z}$ は \mathbb{Z} のイデアルである。
3. 更に一般に、任意の可換環 R と 任意の $a \in R$ にたいして、 aR は R のイデアルである。
4. 任意の環 R に対して、 $\{0\}$ は R のイデアルである。

「生成される部分環」を扱った時と同じ議論で、次のことが成り立つことがわかる。

補題 3.2. 環 R の部分集合 S が与えられているとする。このとき、 S を含む R のイデアルのうち、最小のものが存在する。(これを S で生成される R のイデアルといい、 $\langle S \rangle_{R\text{-イデアル}}$ とか、 (S) と書く。)

例 3.2. 環 \mathbb{Z} のイデアルとして、次のことが成り立つ。

1. $(2) = 2\mathbb{Z}$.
2. $(10) = 10\mathbb{Z}$.
3. $(12, 18) = 6\mathbb{Z}$.
4. $(10, 24) = 2\mathbb{Z}$.

例 3.3. 環 \mathbb{Q} のイデアルとして、次のことが成り立つ。

1. $(2) = \mathbb{Q}$.
2. $(10) = \mathbb{Q}$.
3. $(12, 18) = \mathbb{Q}$.
4. 上の例に限らず全ての \mathbb{Q} のイデアルは $\{0\}$ か \mathbb{Q} 自身である。

上の2つの例を比較すると分かるように、どの環で考えるかが大変重要である。

問題 3.1. \mathbb{Z} のイデアル I が 4615 と 1469 を元として含むとき、13 も I の元であることを示しなさい。