体論要約 No.9

今日のテーマ: **ガロア拡大とガロア群**
[今日はおもに No08 のプリントを使います。]

補題 9.1. K を体、$L = K(\gamma)$ をその有限次単純代数拡大とする。
Ω を K の拡大体とするとき、

$$\#\,\mathrm{Hom}_K^{\mathrm{alg}}(L, \Omega) \leq [L : K].$$

うえの不等式で等号が成り立つための必要十分条件は、次の 2 つのことがともに成り立つことである。

1. γ の最小多項式 $m(X)$ が Ω の中で一次式の積に分解される。
2. γ の最小多項式 $m(X)$ が Ω の中に重根を持たない。

(これは K が L のガロア拡大であることにほかならない。)

補題 9.2. K を体、$L = K(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k)$ をその有限次代数拡大とする。もし、$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ のどの元もその K 上の共役が Ω 内にすべて存在し、それぞれが K 上重根を持たない方程式を K 上でみたせば、

$$\#\,\mathrm{Hom}_K^{\mathrm{alg}}(L, \Omega) = [L : K].$$

系 9.1. K を体、$L = K(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k)$ をその有限次代数拡大とする。もし、$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ のどの元もその K 上の共役が Ω 内にすべて存在し、それぞれが K 上重根を持たない方程式を K 上でみたせば、L は K のガロア拡大である。