

## 体論要約 No.2付録

この付録では次のこの証明を一応載せておこう。

**命題 2.5.** 体  $K$  の拡大体  $L$  と  $K$  上の代数的な元  $\alpha \in L$  が与えられているとする。このとき、

1.  $\alpha$  の最小多項式  $f_0(X)$  は既約である。
2.  $f \in K[X]$  が  $f(\alpha) = 0$  を満たすならば、 $f$  は  $\alpha$  の最小多項式  $f_0$  で割り切れる。
3. とくに  $f \in K[X]$  が  $f(\alpha) = 0$  を満たして、かつ  $f$  が  $K$  上既約ならば、 $f$  は  $f_0$  の定数倍である。 $(f, f_0$  がともにモニックとすれば両者は等しい。)

証明. (1) もし  $f_0$  が可約ならば、ある  $g, h \in K[X]$  が存在して、

$$f_0 = gh, \quad (\deg(g) < \deg(f_0), \quad \deg(h) < \deg(f_0))$$

両辺に  $X = \alpha$  を代入して

$$0 = f_0(\alpha) = g(\alpha)h(\alpha)$$

という  $L$  の元の等式が成り立つ。 $L$  は体であるから、 $g(\alpha) = 0$  or  $h(\alpha) = 0$  がなりたつ。  
(つまり  $\alpha$  は  $f_0$  よりも次数の低い関係式を満たす。) これは  $f_0$  のとり方に反する。

(2)  $f$  を  $f_0$  で割り算すると、

$$f = qf_0 + r \quad (\exists q, r \in K[X], \deg(r) < \deg(f_0))$$

という等式ができる。両辺に  $X = \alpha$  を代入すると

$$f(\alpha) = q(\alpha)f_0(\alpha) + r(\alpha).$$

仮定により、 $f(\alpha) = 0, f_0(\alpha) = 0$  であるから、結局  $r(\alpha) = 0$  がわかる。 $\deg(r) < \deg(f_0)$  と  $r(\alpha) = 0$ 、そして  $f_0$  の最小性から  $f = 0$  が従う。

□

**系 2.1.** モニックな多項式  $f$  が  $f(\alpha) = 0$  を満たすとき、 $f$ : 既約  $\Leftrightarrow f$ :  $\alpha$  の最小多項式

定理と系とともに、環の準同型定理と、「体は整域であること」「整域の部分環はまた整域であること」を使ったほうが(環論の続きとしての)本講義の趣旨に沿うことになるが、詳細はご研究におまかせする。