

体論 やってみよう問題 No.04

出席番号、名前： _____

問題 4.1. 体 K とその拡大体 L が与えられていて、 $\alpha \in L$ は K 上代数的であるとする。
このとき、

α の最小多項式は既約であることを示しなさい。

$K[X]/(f(X)) \cong K[\alpha]$ であることを示しなさい。

$K[X]/(f(X))$ は 体であることを示しなさい。

問題 4.2. 次の各問に答えよ。

1. 数式処理ソフト maxima に $\text{gcdex}(X^4+2X^3+3X^2+4X+5, X^3+2X^2+4X+3, [X]);$
を入力すると $[\frac{2X^2+X+9}{30}, -(\frac{2X^3+X^2+7X+5}{30}), 1]$ と返ってくる。これは
(入力した2つの多項式の gcd が 1 であって、)

$$(X^4+2X^3+3X^2+4X+5) \cdot \frac{2X^2+X+9}{30} - \left(\frac{2X^3+X^2+7X+5}{30} \right) \cdot (X^3+2X^2+4X+3) = 1$$

という意味である。 $\mathbb{Q}[X]/(X^4+2X^3+3X^2+4X+5)$ の元 (X^3+2X^2+4X+3)
(のクラス) の逆元を求めなさい。

2. 同様に $\text{gcdex}(113, 359);$ を入力すると $[-54, 17, 1]$ を得る。 $\mathbb{Z}/355\mathbb{Z}$ の元 113 の逆数を求めよ。
-