

体論 やってみよう問題 No.04

出席番号、名前：_____

問題 4.1. 体 K とその拡大体 L が与えられていて、 $\alpha \in L$ は K 上代数的であるとする。このとき、

α の最小多項式は既約であることを示しなさい。

$K[X]/(f(X)) \cong K[\alpha]$ であることを示しなさい。

$K[X]/(f(X))$ は 体であることを示しなさい。

問題 4.2. 次の各間に答えよ。

1. 数式処理ソフト maxima に gcdex($X^4+2*X^3+3*X^2+4*X+5, X^3+2*X^2+4*X+3, [X]$) ; を入力すると $[\frac{2X^2 + X + 9}{30}, -\left(\frac{2X^3 + X^2 + 7X + 5}{30}\right), 1]$ と返ってくる。これは (入力した 2 つの多項式の gcd が 1 であって、)

$$(X^4+2X^3+3X^2+4X+5) \cdot \frac{2X^2 + X + 9}{30} - \left(\frac{2X^3 + X^2 + 7X + 5}{30}\right) \cdot (X^3+2X^2+4X+3) = 1$$

という意味である。 $\mathbb{Q}[X]/(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 4X + 5)$ の元 $(X^3 + 2X^2 + 4X + 3)$ (のクラス) の逆元を求めなさい。

2. 同様に gcdex(113,359); を入力すると [-54,17,1] を得る。 $\mathbb{Z}/355\mathbb{Z}$ の元 113 の逆数を求めよ。