

任意の体 K に対して K を含む代数的閉体が存在する。

定理 0.1. 任意の体 K に対して K を含む代数的閉体が存在する。

証明. K 上の 既約一変数モニック多項式をすべて考え、それらを

$$\{p_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$$

とおく。添字集合 $\lambda \in \Lambda$ のそれぞれに対して変数 X_λ を一つづつ取り、無限変数の多項式環 $R = K[\{X_\lambda; \lambda \in \Lambda\}]$ を考えよう。

R の元とは、 Λ から有限個 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ をとって、それらの変数の多項式、すなわち $K[X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}]$ の元を考えたものである。別の言い方をすると：

$$R = K[\{X_\lambda; \lambda \in \Lambda\}] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Lambda} K[X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, \dots, X_{\lambda_n}] \right)$$

である。

多項式環の現代的な定義は、「代入原理を満たす環のうち普遍的なもの」という形で与えられる。

さて、 Λ の各元 λ に対して、 K 上の一変数多項式が対応するわけだから、これを $p_\lambda = p_\lambda(X)$ とおく。

R のイデアル I を

$$I = (\{p_\lambda(X_\lambda); \lambda \in \Lambda\})$$

で定義する。

主張 1: $I \neq R$.

証明. $I = R$ とすると、 $1 \in I$ 、すなわち、ある $s_1, s_2, \dots, s_n \in R$ と有限個の $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して、

$$1 = \sum s_i p_{\lambda_i}(X_{\lambda_i})$$

がなりたつ。簡単のために、変数の名前を取り替えて、 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を $1, \dots, n$ 、その他 $\{s_i\}$ に出てくる変数を全部で X_1, \dots, X_N ($N \geq n$) と書くと、

$$1 = s_1(X_1, \dots, X_N) p_1(X_1) + s_2(X_1, \dots, X_N) p_2(X_2) + \dots + s_n(X_1, \dots, X_N) p_n(X_n) \quad (\text{あ})$$

という関係式が成り立つことになる。 K の有限次拡大体 F で、 p_1, \dots, p_n の根 a_1, \dots, a_n をすべて含むもの (積 $p_1 \cdots p_n$ の分解体: 命題 4.2 参照) を取れば、(あ) はもちろん F 上の多項式としても成立している。(あ) の両辺に $X_1 = a_1, X_2 = a_2, X_n = a_n$ を代入すると、 $1 = 0$ となって矛盾を得る \square

主張 1 と Zorn の補題により、 I を含む R の極大イデアル \mathfrak{m} が存在することがわかる。そこで、

$$L = R/\mathfrak{m}$$

とおくと、次の 3 つのことが成り立つ。

(※)

1. L は体である。
2. $K \subset L$.
3. K 上の任意の既約一変数モニック多項式 p にたいして、その少なくとも一つの根が L 内に存在する。

(3) について一応説明しておく、 Λ の定義により、 $\exists \lambda \in \Lambda$ が存在して、 $p = p_\lambda$ になりたつ。 λ に対応する変数 X_λ に対し、 I の定義により

$$p_\lambda(X_\lambda) \in I \subset \mathfrak{m}$$

であり、ゆえに X_λ の L でのクラスを a_λ と書けば $p_\lambda(a_\lambda) = 0$ である。

さて、実は次の主張が成り立つ。これを用いれば定理 0.1 の証明が終了する。

主張 2

(※) を満たす L が与えられているとする。このとき、

$$M = \{x \in L; x \text{ は } K \text{ 上代数的}\}$$

とおけば、 M は K を含む代数閉体である。

が、主張 2 の証明は難しい上に、本講義のまだ証明していない結果を多数用いるので、この時点でこれを用いるのは適当ではない。

そこで、主張 2 の代わりに次のような間に合せの議論でさしあたって満足しておくことにする。

K にたいして、先程の議論で L という体を作ることができた。これを E_1 と呼び替えることとする。 K 上の一変数多項式は必ず E_1 に一つの根を持つ。 E_1 に同様の操作を行うことにより、 E_1 の拡大体 E_2 を作ることができる。 K 上の一変数多項式は必ず E_2 に一つの根を持つ。これを繰り返して

$$K \subset E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$$

という体の拡大の列を得ることができる。そこで、

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

とおけば、 E は K の拡大体であって、 E 上の一変数多項式は必ず E 内に根を持つ。すなわち、 E は代数的閉体である。

□

主張 2 の証明についてはまた気の向いたときに行うことにする。

この稿の作成に当たっては永田「可換体論」を用い... て済ますつもりであったが(「かわりに」以降の部分で)S. Lang の algebra も参考にした。証明全体のアイディアは E. Artin によるものと聞く。