多変数の微分積分演習問題 No.3

問題 3.1. $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ は連続である。

問題 3.2. $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $g(x_1, x_2) = x_1 x_2$ は連続である。

問題 3.3. A を $\mathbb{R}^n$ の開集合、$f_1 : A \to \mathbb{R}$ $f_2 : A \to \mathbb{R}$ は連続であるとする。A 上の関数 $f : A \ni x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$ は連続であることを問題 3.1 を用いて証明しなさい。

問題 3.4. A を $\mathbb{R}^n$ の開集合、$f_1 : A \to \mathbb{R}$ $f_2 : A \to \mathbb{R}$ は連続であるとする。A 上の関数 $f : A \ni x \mapsto f_1(x)f_2(x)$ は連続であることを問題 3.2 を用いて証明しなさい。

問題 3.5. $\mathbb{R}^2$ 上の多項式関数は全て連続である。

問題 3.6. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、 $\mathbb{R}^n$ 上の多項式関数は全て連続である。

問題 3.7. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A から $\mathbb{R}^m$ の部分集合 B への写像 $f : A \to B$ が与えられているとする。このとき、f が講義 No.3 の定義 3.1 の意味で連続ならば、 f による (B の) 開集合 U の逆像 $f^{-1}(U)$ はすべて A の 開集合である。(つまり f は通常の位相空間論の意味で連続である。

問題 3.8. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A から $\mathbb{R}^m$ の部分集合 B への写像 $f : A \to B$ が与えられているとする。このとき、f が通常の位相空間論の意味で連続なら、 講義 No.3 の定義 3.1 の意味で連続である。

問題 3.9. 位相空間 X がコンパクトであるということの定義を調べて、述べよ。

問題 3.10. $\mathbb{R}$ の部分集合 A がコンパクトならば、A は有界閉集合である。

問題 3.11. $\mathbb{R}$ の部分集合 A が有界閉集合ならば、A はコンパクトである。

問題 3.12. コンパクト集合の連続写像による像はコンパクトである。

問題 3.13. 上記 3 つの問いの結果として、任意のコンパクト集合上の任意の連続関数は最大値を持つ。

問題 3.14. コンパクト集合の和集合はコンパクトである。

問題 3.15. 2 つのコンパクト集合の直積集合はコンパクトである。

問題 3.16. コンパクト集合の共通部分は必ずコンパクトだろうか。