線形代数学II No.4(No.3 のやってみよう問題解説部分) 補遺

本講のやってみよう問題 No.3 の説明は不十分であった。

$\mathbb{v}_1$ のことを $\mathbb{u}_1$ とも書くことにすると、次のような関係式が得られる。

$$\begin{aligned}\mathbb{u}_1 &= \mathbb{v}_1 \\ \mathbb{u}_2 &= s\mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2 \\ \mathbb{u}_3 &= t\mathbb{v}_1 + u\mathbb{v}_2 + \mathbb{v}_3\end{aligned}$$

この関係式はこの問題の要所の一つであって、もっと強調すべきであった。とくに次のことに注意しておこう。

- $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ を $\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \mathbb{u}_3$ の線形結合で書くことができる。
- $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ が基底 (の一部) ならば $\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \mathbb{u}_3$ も基底 (の一部) である。つまりこの式は基底変換 (の一部) として使える。

更に進もう。

(1) によれば、

$$(a_1\mathbb{v}_1 + a_2\mathbb{v}_2 + a_3\mathbb{v}_3) \bullet (b_1\mathbb{v}_1 + b_2\mathbb{v}_2 + b_3\mathbb{v}_3) = (a_1\ a_2\ a_3)A\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

であった。

$\mathbb{u}_1$ と $\mathbb{u}_2$, $\mathbb{u}_3$ とは直交することから

$$(1\,0\,0)A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = *, \quad (1\,0\,0)A\begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad (1\,0\,0)A\begin{pmatrix} t \\ u \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

(最初の式は「無意味」なわけだが並べておくと便利なのでつけておく。)

行列の「結合」(教科書 p.25,26,27; 要復習) を用いると、上の 3 つの式は一つにまとめられる (教科書の定義では 2 つの「結合」のみが述べられているが 3 つ以上の「結合」も同様に論じることができる。) :

$$(1\quad 0\quad 0)A\begin{pmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\,*\ \ 0\ \ 0\,)$$

これをさらに進めるために、色を塗り替えておこう。

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1 & s & t\\ 0 & 1 & u\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}* & 0 & 0\end{pmatrix}$$

と書いておく。同様に、 $\mathbb{u}_2$ が $\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_3$ と直交することから、

$$\begin{pmatrix}s & 1 & 0\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1 & s & t\\ 0 & 1 & u\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & * & 0\end{pmatrix}.$$

$\mathbb{u}_3$ が $\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2$ と直交することから、

$$\begin{pmatrix}t & u & 1\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1 & s & t\\ 0 & 1 & u\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & *\end{pmatrix}.$$

を得る。得られた３つを今度は縦に結合すると、

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ s & 1 & 0\\ t & u & 1\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1 & s & t\\ 0 & 1 & u\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}* & 0 & 0\\ 0 & * & 0\\ 0 & 0 & *\end{pmatrix}.$$

そこで $\begin{pmatrix}1 & s & t\\ 0 & 1 & u\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ のことを Q とおくと、上の式は ${}^tQAQ$ が対角行列をなすことを意味しているとわかるわけである。

[別の説明]

行列算を用いると、

$$(\mathbb{u}_1\ \mathbb{u}_2\ \mathbb{u}_3) = (\mathbb{v}_1\ \mathbb{v}_2\ \mathbb{v}_3) \begin{pmatrix}1 & s & t\\ 0 & 1 & u\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

両辺に現れる行列をそれぞれ記号で置いて、

$$\mathbb{U} = \mathbb{V}Q$$

と書こう。$\mathbb{U}, \mathbb{V}$ は成分が実数ではなく、ベクトルなので今まで習ってきた行列とは違い、取り扱いには注意が必要だが、とりあえず演算するときに適度に注意してこのままで進む。このような行列の「積」$\bullet$ を、成分の積のところを「内積」に置き換えることで定義すると、

$${}^t\mathbb{U} \bullet \mathbb{U} = {}^tQ{}^t\mathbb{V} \bullet \mathbb{V}Q = {}^tQAQ$$

という形式的な式を得る。直交化法で得た $\mathbb{u}$ をもちいれば左辺は必然的に対角行列である。このことがやってみよう問題で説明しようとしていたことであった。

[正当化] 上で、怪しげな「積」を定義して怪しげな計算をしてしまっている。一つの正当化を述べよう。行列算を廃して、和の記号で書くと以下のように通常の記号のみを用いた正しい式を得る。

$$\mathbb{u}_i = \sum_j \mathbb{v}_j (Q)_{ji}$$

$$\begin{aligned}(\mathbb{u}_i \bullet \mathbb{u}_k) &= (\sum_m \mathbb{v}_m (Q)_{mi}) \bullet (\sum_l \mathbb{v}_l (Q)_{kl}) \\ &= \sum_{m,l} (Q)_{mi} (\mathbb{v}_m \bullet \mathbb{v}_l)(Q)_{kl} \\ &= \sum_{m,l} (Q)_{mi} (A)_{ml} (Q)_{kl} \\ &= ({}^tQAQ)_{ik}\end{aligned}$$

正当化の方法はこのような素朴な成分計算以外にも多く考えられるが、あまり深入りすると行列算の簡明な計算が埋もれてしまうのでこれぐらいにしておこう。