

## 線形代数学II 期末試験的なレポート問題

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

とする。

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ とし、}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & X_1 & Y \\ 0_3 & A_2 & Z \\ 0_3 & 0_3 & A_3 \end{pmatrix}$$

とおく。つまり

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

このとき次の問い合わせについてできるだけ答えなさい。

- $A$  の 固有値と固有ベクトルをそれぞれ求めよ。

以下  $p_A(X) = (X - 3)^3 q(X)$ .  $q(X) = (X - 4)^3 (X - 5)^3$

$a(X) = (1 - q(X)) / q(3)^3$  とおくと、

- $a(X)$  は  $(X - 3)^3$  で (多項式として) 割り切れる. (単に命題が書いている項目については、「その項目のことを確かめるもしくは証明せよ。」の意味です。以下も同様)
- $a(X)^2 - a(X)$  は  $q(X)$  で (多項式として) 割り切れる.
- $A$  の 4弱固有空間の基底を求めよ。答えには 「 $W = a(A)$  の 第??列」という表記を用いてもよい。

なお、参考までに、 $W = a(A)$  は計算機によればつぎのようであるらしい。 $W = a(A) = (1_9 - q(A)/q(\lambda))^3 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & -\left(\frac{3}{4}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{9}{4} & -\left(\frac{7}{4}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2025 年 (令和 07 年) 7 月 22 日火曜日 12:49:55

- $A_3$  と  $A$  の入力に齟齬があったので  $A_3$  の定義を修正しました。
- $3 \times 3$  行列の  $X_1$  と問に出てくる変数の  $X$  は別物です。全く関係がありません(うっかり記号がぶつかってしました。) ご注意ください。(とりあえず 7/21 日までは行列の方の「 $X$ 」であったものを現在は  $X_1$  に記号だけ直しておきました。)
- いずれも  $A$  はそのまま(7/21 以前と同じ)です。