線形代数学 II [古い] 期末試験的なレポート問題 [去年分]

- 答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありません。
- 本稿は現在暫定版です。間違いがある場合などに予告なしに変更される可能性があります。
- 2023/7/4 17:00 ごろ赤書き部分を追加しました。(それ以前は “A=” がなかった)
- 2023/7/4 18:00 ごろ (1) の赤書き部分を訂正。(それ以前は 2 になっていた。現在は 3)
- なお、カラープリンタを用いて無理に対応する必要はありません。もし不明な点があれば、土基までお尋ね下さい。

問題 30.1. 本問では α,β をあなたが選んだ具体的な整数 (ただし、$\alpha\neq\beta$ を選んで解答の最初に明記した上で、α,β にそれらの整数をあてはめた上で解答せよ。解答には α,β を含まないように、30 名程度の解答者の中で、おなじ数の組が選ばれることがないように留意すること。

$$
A=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \beta & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}
$$

とおく。以下、[要約] 系 11.1 の方針に追随する。(番号は必ずしも対応していない。) が、解答は必ずしも講義でやった (補題 11.5 に沿った) 方針で行う必要はない。

(1) $a(X)(X-\alpha)^2+b(X)(X-\beta)^3=1$ を満たす $a,b\in\mathbb{C}[X]$ の例を求めなさい。

[正攻法の解]

$$
\begin{aligned}
(X-\beta)^3-(\alpha-\beta)^3 &= X^3-3\beta X^2+3\beta^2X-3\alpha\beta^2+3\alpha^2\beta-\alpha^3\\
&=(X-\alpha)(X^2+(\alpha-3\beta)X+3\beta^2-3\alpha\beta+\alpha^2)
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{X-\beta}{\alpha-\beta}\right)^3-1=\frac{1}{(\alpha-\beta)^3}(X-\alpha)(X^2+(\alpha-3\beta)X+3\beta^2-3\alpha\beta+\alpha^2)$$

両辺を 2 乗するとよい。

$$a(X)=\frac{1}{(\alpha-\beta)^6}(X^2+(\alpha-3\beta)X+3\beta^2-3\alpha\beta+\alpha^2)^2$$

である。

[別解]

$$(X-\alpha)-(X-\beta)=(\beta-\alpha)$$

の両辺を 5 乗して、二項定理を用いる

$$\sum_{j\geq 2}\binom{5}{j}(X-\alpha)^j(-(X-\beta))^{5-j}+\sum_{j<2}\binom{5}{j}(X-\alpha)^j(-(X-\beta))^{5-j}=(\beta-\alpha)^5$$

$$\begin{aligned}a(X)&=\frac{1}{(\beta-\alpha)^5}\sum_{j\geq 2}\binom{5}{j}(X-\alpha)^{j-2}(-(X-\beta))^{5-j}\\&=-\frac{1}{(\beta-\alpha)^5}(4X^3+15\beta X^2-3\alpha X^2-20\beta^2X+10\alpha\beta X-2\alpha^2X\\&\qquad+10\beta^3-10\alpha\beta^2+5\alpha^2\beta-\alpha^3)\end{aligned}$$

(2) (1) の a に対して、 $P=a(A)(A-\alpha)^2$ を求めよ。

(答)$t=\beta-\alpha$, $s=1/t$ とおくと、

$$P=\begin{pmatrix}0&0&s^2&-2s^3&3s^4\\0&0&s&-s^2&s^3\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) (2) の P に対して、$P^2=P$ を確認せよ。

(4) (3) の P に対して、Image P の基底をうまくとり、A (AP としても同じ) が Image P 上 標準形であるようにせよ。

(答) $B=P-\beta 1_5$ とおく。$B^3P=0$ で、

$$B^2P\mathbb{e}_5={}^t\begin{pmatrix}\frac{1}{t^2}&\frac{1}{t}&1&0&0\end{pmatrix}:=\mathbb{v}_1$$

$$BP\mathbb{e}_5={}^t\begin{pmatrix}-\frac{2}{t^3}&-\frac{1}{t}&0&1&0\end{pmatrix}:=\mathbb{v}_2$$

$$P\mathbb{e}_5={}^t\begin{pmatrix}\frac{3}{t^4}&\frac{1}{t^3}&0&0&1\end{pmatrix}:=\mathbb{v}_3$$

これらのベクトルを並べる。 $B\mathbb{v}_3 = \mathbb{v}_2$, $B\mathbb{v}_2 = \mathbb{v}_1$, $B\mathbb{v}_1 = 0$ であるから、基底 $\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ にたいして B は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表現される。これはつまり

$$B\left(\mathbb{v}_1\mathbb{v}_2\mathbb{v}_3\right) = \left(\mathbb{v}_1\mathbb{v}_2\mathbb{v}_3\right).\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

という意味である。、A は基底 $\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ にたいして

$$\begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

と表現される。これは同様に

$$\left(\mathbb{v}_1\mathbb{v}_2\mathbb{v}_3\right) = \left(\mathbb{v}_1\mathbb{v}_2\mathbb{v}_3\right).\begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

という意味である。

(5) (必要なら $Q = 1_4 - P$ に対して同じことを考え、)A のジョルダンの標準形を上のことに沿ってもとめよ。

(答) $C = A - \alpha 1_5$, $Q = 1_5 - P$ とおく。

$C^2 Q = 0$ であって、$C.Q\mathbb{e}_2 = \mathbb{e}_1$ であるから $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2$ が標準形を作るために使える。

まとめると、$R = (\mathbb{e}_1\mathbb{e}_2\mathbb{v}_1\mathbb{v}_2\mathbb{v}_3)$ とおけば、R は正則行列であって、

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

である。これは A の一つのジョルダンの標準形である。 $\square$