多変数の微分積分 期末試験的なレポート問題 NO.2024

- 答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありません。
- 本稿は現在暫定版です。間違いがある場合などに予告なしに変更される可能性があります。
- 7/18 18:00 ごろ訂正。2024 の題意がわかりにくかったので少し改めました。

問題 2024.1. つぎの問いに答えなさい。

(1) $r > 0$ とし、$f(x, y)$ は $B_r(0,0) \setminus (0,0)$ 上で定義された 2 変数実数値関数, $A \in \mathbb{R}$ とする。「 $f(x, y)$ が $(0, 0)$ において極限 A を持つ」ということの定義 (ϵ-δ 論法を用いた正式なほう) を述べよ。
(答)
$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ (||(x, y)|| < \delta \implies |f(x, y) - A| < \epsilon)$

(2) 定義に照らして、

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$$

は原点 $(0, 0)$ において、極限を持たないことを示せ。
(答) [以下の書き方は冗長で、注意も入れたため説明の順序もうまくない。あくまで参考程度のものである。試験でこのとおりに書いたとしても満点ではない。]
ポイント:
- ϵ-δ 論法とは所詮は不等式と $\forall$,$\exists$ の適切な使用だということを理解している。
- 変数の決まる順番を正しく把握し、使いこなせている。
  - 変数は一度決めたら勝手に変えることはできない。
  - とくに $\forall \epsilon\ \exists \delta$ などの $\forall$ や $\exists$ は各変数に付き (一つの問題の解答では) 一度きりしか出てこないし、使えない。
- あとは論理の問題。

f が極限 A を持っていたとする。つまり、

(あ) $$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 (||(x, y)|| < \delta \implies |f(x, y) - A| < \epsilon)$$

が成り立ったとする。
(あ) の ϵ として 1/10 を採用しよう。次のような δ が存在するということになる。

(い) $$(||(x, y)|| < \delta \implies |f(x, y) - A| < 1/10)$$

以下、δ が 大きすぎるのも面倒なだけなので $\delta_1 = \min(1, \delta)$ とおく。すぐにわかるように (い) の δ のところを δ_1 に変えても (い) は相変わらず正しい。つまり、

(い’) $$(||(x, y)|| < \delta_1 \implies |f(x, y) - A| < 1/10)$$

(I) (x, y) としてとくに x 軸上の点 $(\delta/2, 0)$ を選ぶと、$||(\delta, 0)|| < \delta$ ゆえ $|A| < 1/10$ ($f(\delta, 0) = 0$ に注意。) を得る。
(II) (x, y) としてとくに曲線 $y = x^3$ 上の点 $(\delta_1/2, (\delta_1/2)^3)$ を選ぶと、
$||(\delta_1/2, (\delta_1/2)^3)|| < \delta_1$ ゆえ $|1/2 - A| < \epsilon)$ を得る。($f((\delta_1/2, (\delta_1/2)^3) = 1/2$ に注意。) このことから $|1/2 - A| < 1/10$ である。
三角不等式により、(I)(II) を同時に満たす A は存在しないから、 f は 極限を持たない。

問題 2024.2. $\delta_0 > 0$ とする。n 変数関数実数値関数 f が $a \in \mathbb{R}^n$ の δ_0-近傍 $B_{\delta_0}(a)$ で C^1 級のとき、 $||u|| < \delta_0$ なる $u \in \mathbb{R}^n$ に対して、f に一次式 $g(t) = ut + a$ を合成した関数 $h = f(g(t))(= f(ut + a))$ を考える。h に微分積分学の基本定理

$$\int_0^1 h'(t)dt = h(1) - h(0)$$

に適用したい。

(3) $h'(t)$ を f の x_j に関する偏微分 f_{x_j} の $a + tu$ での値 $f_{x_j}(a + tu)$, u の座標成分 $(u = (u_1, \ldots, u_n))$ などを用いて書け。
(答) 連鎖律により $h'(t) = \sum_j u_j f_{x_j}(a + tu)$.

(4) 任意の $\epsilon > 0$ に対してある δ $(0 < \delta < \delta_0)$ が存在して

$$||u|| < \delta \implies |\int_0^1 f_{x_j}(a + tu)dt - f_{x_j}(a)| < \epsilon(j = 1, 2, \ldots, n)$$

であることを示せ。
(答) 各 j について f_{x_j} は a において連続であるからある $c_j > 0$ が存在して

$$(||h|| < c_j \text{ and } ||h|| < \delta_0) \implies ||f_{x_j}(a + h) - f_{x_j}(a)|| < \epsilon$$

$\delta = \min(c_1, \ldots, c_n, \delta_0)$ と置こう。$||u|| < \delta$ をみたす任意の u に対して、$(\forall t \in [0, 1]$ にたいして $||tu|| \leq ||u||$ であることに注意して補題 6.1 を用いると$)$

$$\int_0^1 ||f_{x_j}(a + tu) - f_{x_j}(a)||dt \leq \int_0^1 \epsilon dt = \epsilon \quad \square$$

※ f に一次式 $g(t) = ut + a$ を合成した関数 $h = f(g(t))$ に微分積分学の基本定理

$$\int_0^1 h'(t)dt = h(1) - h(0)$$

に適用すれば、f の「一次のテイラー展開」が得られる。(ここの部分はあえて問題にしなかったので特に答える必要はない。)

問題 2024.3. $0 < R_1 < R_2$ とし、 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < y \text{ and } R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2\}$ とおく。このとき

(5) $\int_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ をもとめよ。

(答) $\pi/8$.

ポイント

- 変数変換を用いる。
- 変換のジャコビアンという言葉を適切に書いて、計算ができている。
- 変数変換で D はどのような領域に変わるかが書けている。