

[略解] 多変数の微分積分 中間試験的なレポート問題 [解答例]

- 答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありません。
- 本稿は現在暫定版です。間違いがある場合などに予告なしに変更される可能性があります。

問題 124.1.

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x^3 - x)(y^2 - y) = 0\}$$

とおく。このとき、以下の各問いに答えなさい。

- (1) S の概形を描きなさい。
- (2) S は開集合ではないことを示しなさい。
- (3) S は閉集合であることを示しなさい。

(ただし、 \mathbb{R}^2 には通常位相を入れるものとする。)

(1) $S = \{x, y \in \mathbb{R}^2; x = 1 \text{ or } x = -1 \text{ or } x = 0 \text{ or } y = 0 \text{ or } y = 1\}$
(図略)

(2)

[S : open $\Leftrightarrow \forall P \in S \exists \epsilon > 0 (B_\epsilon(P) \subset S)$ であるから、

[S : not open \Leftrightarrow 命題 A: $\exists P \in S \forall \epsilon > 0 (B_\epsilon(P) \not\subset S)$ である。

命題 A を示せば良い。]

$P = (0, 0)$ を考える。 $P \in S$ であり、 $\forall \epsilon > 0$ に対して $\delta = \min(1/2, \epsilon/2)$ と置けば、

- $0 < \delta < \epsilon$ である。ゆえに $Q \stackrel{\text{def}}{=} (0, \delta) \in B_\epsilon(P)$.
- $0 < \delta < 1/2$ である。ゆえに $Q \notin S$.
- とくに $B_\epsilon(P) \not\subset S$.

よって S は開集合ではない。

(3) [S : closed $\Leftrightarrow T = \mathbb{C}S$: open

であり、 T : open \Leftrightarrow

命題 B: $\forall P \in T \exists \epsilon > 0 (B_\epsilon(P) \subset T)$ である。

命題 B を示せば良い。]

$(a, b) \in T (= \mathbb{C}S)$ を任意にとる。 $a \notin \{0, \pm 1\}, b \notin \{0, 1\}$ である。そこで $\epsilon = \min(|a|/2, |a-1|/2, |a+1|/2, |b|/2, |b-1|/2)$ とおけば任意の $(p, q) \in B_\epsilon((a, b))$ に対して、

- $\|(p, q)(a, b)\| < \epsilon$ により $|a - p| < \epsilon$.

$$\begin{aligned} |p| &\geq |a| - |a - p| && (\text{三角不等式}) \\ &\geq |a| - \epsilon && (\because |a - p| < \epsilon) \\ &\geq |a| - |a|/2 && (\because \epsilon \geq |a|/2) \\ &= |a|/2 > 0. \end{aligned}$$

よって $|p| > 0$.

- 同様にして、 $|p - 1| > 0$, $|p + 1| > 0$, $|q| > 0$, $|q - 1| > 0$ が確かめられる。
- 以上により、 $B_\epsilon(a, b) \subset T(= \mathbb{C}S)$ である。

命題 B が確かめられたから、 $\mathbb{C}S$ は開集合であり、翻って S は閉集合である。

(一般論に基づく (3) の別解: $f = (x^3 - x)(y^2 - y)$ と置く。

- f は多項式であるから、連続である。
- $\{0\}$ は \mathbb{R} の閉集合である。
- 連続写像による閉集合の逆像は閉集合である。
- $S = f^{-1}(\{0\})$.

よって S は \mathbb{R}^2 の閉集合である。

(尤も、上の議論の中身がわかっていないのに使っていたのでは試験としての意味が薄いので、この議論を用いた解答があればそのところの理解力を試したところだろう。ただし、応用力はこっちの方が数段上なので、学生諸君にはこっちの解答を(内容を十分理解した上で)使うことをおすすめする。)

問題 124.2.

$f : X = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$f(r, \theta, \varphi) = (f_1(r, \theta, \varphi), f_2(r, \theta, \varphi), f_3(r, \theta, \varphi)) = (r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta))$$

で定義する。このとき、以下の各問いに答えなさい。

- (1) f_1, f_2, f_3 の $(r, \theta, \varphi) \in X$ における全微分 $df_1|_{(r, \theta, \varphi)}, df_2|_{(r, \theta, \varphi)}, df_3|_{(r, \theta, \varphi)}$ をそれぞれ求めなさい。
- (2) f の $(r, \theta, \varphi) \in X$ における全微分 $Df|_{(r, \theta, \varphi)}$ を求めなさい。
- (3) $\det(Df|_{(r, \theta, \varphi)})$ を求めなさい。どう計算したかも必ず書くこと。

(1) $df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial r} dr + \frac{\partial f_1}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} d\varphi \dots$ etc であるから、
 $df_1 = \sin(\theta) \cos(\varphi) dr + r \cos(\theta) \cos(\varphi) d\theta - r \sin(\theta) \sin(\varphi) d\varphi$.
 $df_2 = \sin(\theta) \sin(\varphi) dr + r \cos(\theta) \sin(\varphi) d\theta + r \sin(\theta) \cos(\varphi) d\varphi$.
 $df_3 = \cos(\theta) dr - r \sin(\theta) d\theta$

(2) (1) をそのまま並べて、

$$df = \begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \sin(\varphi) & r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix}$$

係数行列だけ取り出したのが Df なので

$$Df = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \sin(\varphi) & r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 3行目に関する展開を使えば $\det(Df) = r^2 \sin(\theta)$ を得る。