

多変数の微分積分演習問題 NO.1

問題 1.1. \mathbb{R}^2 の部分集合で、開集合でも閉集合でもないものの例をあげよ。(もちろん理由も述べること) 一人1個を限度とするが、本年度履修生全体としては何個上げていただいても構わない。ただし、オリジナリティー、簡明さを考慮すること。(つまり似たようなものは一個にカウントされないのでご注意ください。)

問題 1.2. \mathbb{R}^2 の開円板は開集合であることを示せ。

問題 1.3. \mathbb{R}^2 の開円板は閉集合でないことを示せ。

問題 1.4. \mathbb{R}^2 の閉円板は閉集合であることを示せ。

問題 1.5. \mathbb{R}^2 の閉円板は開集合でないことを示せ。

問題 1.6. 开区間 (a, b) は \mathbb{R} の部分集合としては開集合であるが、 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a, b) \text{ and } y = 0\}$ は \mathbb{R}^2 の開集合ではないことを示せ。

問題 1.7 (位相空間論を正しく履修のあとでよい。). 开区間 (a, b) と $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a, b) \text{ and } y = 0\}$ は (通常の位相で) 同相であることを示しなさい。

問題 1.8. 任意の正の整数 n に対して、 \mathbb{R}^n の開球は開集合であることを示せ。

問題 1.9. 任意の正の整数 n に対して、 \mathbb{R}^n の開球は閉集合でないことを示せ。

問題 1.10. 任意の正の整数 n に対して、 \mathbb{R}^n の閉球は閉集合であることを示せ。

問題 1.11. 任意の正の整数 n に対して、 \mathbb{R}^n の閉球は開集合でないことを示せ。

問題 1.12. 任意の正の整数 n に対して、 \mathbb{R}^n の開集合の有限個の共通部分は開集合であることを示せ。

問題 1.13. 任意の正の整数 n に対して、 \mathbb{R}^n の閉集合の任意個 (無限個かもしれない) の共通部分は閉集合であることを示せ。

問題 1.14. 任意の正の整数 n に対して、 \mathbb{R}^n の閉集合の有限個の和集合は閉集合であることを示せ。

問題 1.15. 任意の正の整数 n に対して、 \mathbb{R}^n の開集合の任意個 (無限個かもしれない) の和集合は開集合であることを示せ。

問題 1.16. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$ のグラフをかけ。

問題 1.17. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y^2$ のグラフをかけ。

問題 1.18. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y^3$ のグラフをかけ。

問題 1.19. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^3$ のグラフをかけ。

問題 1.20. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y)$ のグラフをかけ。

問題 1.21. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto e^x \sin(y)$ のグラフをかけ。

問題 1.22. $V, \langle \bullet \rangle$ を実計量ベクトル空間とし、任意の $x, y \in V$ を取る。このとき:

(1) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0$$

であることを確認せよ。

(2) (コーシー・シュワルツの不等式) 前小問と高校時代の二次式の知識を使って

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

であることを示せ。ただし $v \in V$ に対して、 $\|v\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle v, v \rangle}$ と書くことにする。

問題 1.23 (三角不等式). $V, \langle \bullet \rangle$ を実計量ベクトル空間とし、任意の $x, y \in V$ を取る。このとき:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

が成り立つことをコーシー・シュワルツの不等式を用いて示せ。

問題 1.24. (1) 実ノルム空間の定義を (教科書、ネット等を調べて) 書け。

(2) $V, \langle \bullet \rangle$ を実計量ベクトル空間とし、 $\|v\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle v, v \rangle}$ と書くことにする。このとき $V, \|\bullet\|$ は実ノルム空間であることを示せ。

ここから下は主に進んで勉強したい人向けの補充問題である。

問題 1.25. 複素ベクトル空間 V のエルミート内積の定義と複素計量ベクトル空間の定義を調べてかけ。

問題 1.26. 複素計量ベクトル空間 V のコーシー・シュワルツの不等式を証明せよ。

問題 1.27. 複素計量ベクトル空間 V での三角不等式を証明せよ。

問題 1.28. 複素計量ベクトル空間 $(V, \langle \bullet \rangle)$ が与えられたとする。このとき $(V, \Re(\langle \bullet \rangle))$ は実計量ベクトル空間である (ただしこの講義では一般に $\Re(a)$ は複素数 a の実部を表す記号である。)