

線形代数学 II [古い] 期末試験的なレポート問題 [去年分]

- 答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありません。
- 本稿は現在暫定版です。間違いがある場合などに予告なしに変更される可能性があります。
- 2023/7/4 17:00 ごろ赤書き部分を追加しました。(それ以前は“A=” がなかった)
- 2023/7/4 18:00 ごろ (1) の赤書き部分を訂正。(それ以前は2になっていた。現在は3)
- なお、カラースリッターを用いて無理に対応する必要はありません。もし不明な点があれば、土基までお尋ね下さい。

問題 30.1. 本問では α, β をあなたが選んだ具体的な整数 (ただし、 $\alpha \neq \beta$ を選んで解答の最初に明記した上で、 α, β にそれらの整数をあてはめた上で解答せよ。解答には α, β を含まないように、30名程度の解答者の中で、おなじ数の組が選ばれることがないように留意すること。

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

とおく。以下、[要約]系 11.1 の方針に追随する。(番号は必ずしも対応していない。) が、解答は必ずしも講義でやった (補題 11.5 に沿った) 方針で行う必要はない。

- (1) $a(X)(X - \alpha)^2 + b(X)(X - \beta)^3 = 1$ を満たす $a, b \in \mathbb{C}[X]$ の例を求めなさい。
[正攻法の解]

$$\begin{aligned} (X - \beta)^3 - (\alpha - \beta)^3 &= X^3 - 3\beta X^2 + 3\beta^2 X - 3\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta - \alpha^3 \\ &= (X - \alpha)(X^2 + (\alpha - 3\beta)X + 3\beta^2 - 3\alpha\beta + \alpha^2) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{X - \beta}{\alpha - \beta}\right)^3 - 1 = \frac{1}{(\alpha - \beta)^3} (X - \alpha)(X^2 + (\alpha - 3\beta)X + 3\beta^2 - 3\alpha\beta + \alpha^2)$$

両辺を 2 乗するとよい。

$$a(X) = \frac{1}{(\alpha - \beta)^6} (X^2 + (\alpha - 3\beta)X + 3\beta^2 - 3\alpha\beta + \alpha^2)^2$$

である。

[別解]

$$(X - \alpha) - (X - \beta) = (\beta - \alpha)$$

の両辺を 5 乗して、二項定理を用いる

$$\sum_{j \geq 2} \binom{5}{j} (X - \alpha)^j (-(X - \beta))^{5-j} + \sum_{j < 2} \binom{5}{j} (X - \alpha)^j (-(X - \beta))^{5-j} = (\beta - \alpha)^5$$

$$\begin{aligned}
 a(X) &= \frac{1}{(\beta - \alpha)^5} \sum_{j \geq 2} \binom{5}{j} (X - \alpha)^{j-2} (-(X - \beta))^{5-j} \\
 &= -\frac{1}{(\beta - \alpha)^5} (4X^3 + 15\beta X^2 - 3\alpha X^2 - 20\beta^2 X + 10\alpha\beta X - 2\alpha^2 X \\
 &\quad + 10\beta^3 - 10\alpha\beta^2 + 5\alpha^2\beta - \alpha^3)
 \end{aligned}$$

(2) (1) の a に対して、 $P = a(A)(A - \alpha)^2$ を求めよ。

(答) $t = \beta - \alpha$, $s = 1/t$ とおくと、

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s^2 & -2s^3 & 3s^4 \\ 0 & 0 & s & -s^2 & s^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) (2) の P に対して、 $P^2 = P$ を確認せよ。

(4) (3) の P に対して、Image P の基底をうまくとり、 A (AP としても同じ) が Image P 上 標準形であるようにせよ。

(答) $B = P - \beta 1_5$ とおく。 $B^3 P = 0$ で、

$$B^2 P e_5 = {}^t \left(\frac{1}{t^2} \quad \frac{1}{t} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \right) := v_1$$

$$B P e_5 = {}^t \left(-\frac{2}{t^3} \quad -\frac{1}{t} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \right) := v_2$$

$$P e_5 = {}^t \left(\frac{3}{t^4} \quad \frac{1}{t^3} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \right) := v_3$$

これらのベクトルを並べる。 $Bv_3 = v_2$, $Bv_2 = v_1$, $Bv_1 = 0$ であるから、基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ にたいして B は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表現される。これはつまり

$$B(v_1 v_2 v_3) = (v_1 v_2 v_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

という意味である。 A は基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ にたいして

$$\begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

と表現される。これは同様に

$$(v_1 v_2 v_3) = (v_1 v_2 v_3) \cdot \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

という意味である。

(5) (必要なら $Q = 1_4 - P$ に対して同じことを考え、) A のジョルダンの標準形を上のことにも沿ってもとめよ。

(答) $C = A - \alpha 1_5$, $Q = 1_5 - P$ とおく。

$C^2 Q = 0$ であって、 $C \cdot Q e_2 = e_1$ であるから e_1, e_2 が標準形を作るために使える。

まとめると、 $R = (e_1 e_2 v_1 v_2 v_3)$ とおけば、 R は正則行列であって、

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

である。これは A の一つのジョルダンの標準形である。

□