線形代数学 II やってみよう問題 NO.10 ヒント

出席番号、名前：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 10.1. ヒント

(3) 前小問の仮定のもと、$f_A(x) = (x-\lambda)f_B(x)$ を証明せよ。
第一列に関する行列式の展開をもちいる。

$$f_A(x) = \det\begin{pmatrix} (x-\lambda) & -w \\ 0 & x1_{n-1} - B \end{pmatrix} = (x-\lambda)\det(x1_{n-1} - B) = (x-\lambda)f_B(x).$$

(4) 前小問と同じ仮定のもと、$(A - \lambda 1_n)\cdot f_B(A)$ を計算せよ。
行列のブロック区分けを上手く用いる。

$$(A-\lambda 1_n)\cdot f_B(A) = \begin{pmatrix} 0 & w \\ 0 & B - \lambda 1_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_B(\lambda) & * \\ 0 & f_B(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & wf_B(B) \\ 0 & f_B(B) \end{pmatrix}$$

n に関する帰納法をもちいると、$f_B(B) = 0$ がしたがうから、それを用いて最後の行列=0 とやってもよい。

なお、$f_A(x) = \det(1_n x - A)$ の「x に直接 $x = A$ を代入して」

(誤)
$$f_A(A) = \det(1_n A - A) = \det(0) = 0$$

とやる誤解答を時折目にするが、

- 何でもかんでも代入できて、その計算も正当化できるというのは幻想に過ぎない。(できるというのなら根拠を述べるべき。)
- 強いて言うなら $1_n x - A$ に $x = A$ を代入するとは 可換環 $\mathbb{C}[A]$ 上の行列

$$\begin{pmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11}1_n & a_{12}1_n & \dots a_{1n}1_n \\ a_{21}1_n & a_{22}1_n & \dots a_{2n}1_n \\ \dots & & \\ a_{11}n_n & a_{n2}1_n & \dots a_{nn}1_n \end{pmatrix}$$

を考える (テンソル積の言葉を使えば $1_n \otimes A - A \otimes 1_n$ を考える) ことに当たり、この行列の $M_n(\mathbb{C}[A])$ の元としての行列式を考えるのが $f_A(A)$ にあたる。もちろん $1_n \otimes A - A \otimes 1_n$ は 0 行列とは異なるし、$\det(1_n \otimes A - A \otimes 1_n)$ を考えるにはそれなりの準備が必要である。これは「環上の加群」の守備範囲である。実際、この考えを押し進めて CH 定理を証明するのも可能ではある。が、多分誤解答を書いた人の思っていたのとは随分と違ったものに感じるだろう。